非線形常微分方程式の２点境界値問題入門
−正値解の存在と一意性について−

田中　敏　(岡山理科大学理学部応用数学科) *

1. はじめに

非線形微分方程式の２点境界値問題は, 理論上及び応用上の両面で重要な問題であるだけでなく, 放物型方程式の定常解や楕円型方程式の球対称解などの偏微分方程式を考察する際にもよく現れるものである．変分法, 不動点定理, 写像度の理論, 分岐理論, shooting method (狙い撃ち法) などの様々な方法によって, その正値解の存在を示すことができる．それぞれ長所と短所があるが, ここではもっとも初等的で理解しやすい shooting method を紹介する．正値解の存在に比べると, その一意性を示す方法は限られており困難を伴うことが多い．ここではその方法として, 自励系の場合は time-map 法について, 非自励系の場合は Kolodner-Coffman の方法について解説を行う．これらの方法はいずれも shooting method を基礎としており, 非常に素朴な方法であるが, ２点境界値問題の解の厳密な個数を知るには大変有用なものである．

問題

$$
\begin{cases} u'' + h(x)f(u) = 0 \quad (0 < x < 1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1.1}
$$

を**２点境界値問題**という．微分方程式の解 $u(x)$ は省略して単に u と書くことが多い．$x = 0$ と $x = 1$ が考えている区間 $(0, 1)$ の境界である．条件 $u(0) = u(1) = 0$ を**境界条件**という．境界条件には様々な種類がある．例えば, より一般的な条件

$$\alpha u(0) + \beta u'(0) = A, \quad \gamma u(1) + \delta u'(1) = B$$

などがある．しかし, ここでは議論を簡潔にするため, 以下では $u(0) = u(1) = 0$ のみを扱うことにする．

問題 (1.1) の境界は $x = 0$, $x = 1$ としているが, 一般的な境界 $x = a$, $x = b$ の場合は $x = 0$, $x = 1$ に帰着できる (問 1.1 参照).

問題 1.1. 境界値問題

$$
\begin{cases} v'' + g(t)f(v) = 0 \quad (a < t < b), \\ v(a) = v(b) = 0 \end{cases}
$$

の解 v に対して,

$$u(x) = v((b-a)x + a), \quad h(x) = (b-a)^2 g((b-a)x + a)$$

とおくとき, u は (1.1) の解であることを示せ.

$f(s) = s$ のとき線形である．非線形の場合の例はいろいろあるが, 代表的なものとしては次がある.

$f(s) = s^p \ (p \neq 1,\ p > 0)$	[Emden-Fowler 方程式]
$f(s) = -s + s^3$	[スカラー場方程式]
$f(s) = \lambda e^s,\ \lambda > 0$	[Liouville 方程式]

Emden-Fowler 方程式は宇宙物理学, スカラー場方程式は量子力学, Liouville 方程式は微分幾何学などに現れる.

以下, $f(s)$ は Emden-Fowler 型 $f(s) = s^p$ $(p \neq 1, p > 0)$ に近いものを中心に考える．その場合, $f(s)$ は

$$f(0) = 0, \quad f(s) > 0,\ f'(s) > 0\ (s > 0), \quad \lim_{s\to\infty} f(s) = \infty$$

*email: tanaka@xmath.ous.ac.jp
2016/7/20

を満たす．さらに $(f(s)/s)' = (p-1)s^{p-2}$ であるから，

$$0 < p < 1 \quad \text{のとき} \quad (f(s)/s)' < 0 \quad (s > 0),$$
$$p > 1 \quad \text{のとき} \quad (f(s)/s)' > 0 \quad (s > 0),$$

を満たす．そこで，以下，$f(s)$ は次の条件

(F) $\qquad f \in C^1[0,\infty),\ f(0)=0,\ f(s)>0,\ f'(s)>0\ (s>0),\ \lim_{s\to\infty} f(s) = \infty$

を満たすと仮定する．* さらに次のどちらかを仮定する．

(1.2) $$(f(s)/s)' < 0 \quad (s > 0),$$

(1.3) $$(f(s)/s)' > 0 \quad (s > 0).$$

条件 (1.2) の場合，(1.1) の微分方程式は**劣線形** (sublinear)，条件 (1.3) の場合，(1.1) の微分方程式は**優線形** (superlinear) と呼ばれることもある．以下，特に断らない限り，条件 (F) を仮定する．

注意 1.1. $f \in C^1(0,\infty)$ のとき，条件 (1.2) と (1.3) は，それぞれ，

$$f'(s) < f(s)/s \quad (s > 0),$$
$$f'(s) > f(s)/s \quad (s > 0),$$

と同値である．

条件 (1.2), (1.3) のかわりに次の条件

(1.4) $$[f(s)]^2 > F(s)f'(s) \quad (s > 0),$$

(1.5) $$[f(s)]^2 < F(s)f'(s) \quad (s > 0),$$

を仮定することもある．ここで，

$$F(s) = 2\int_0^s f(t)dt$$

である．

注意 1.2. 条件 (F) と $f \in C^2(0,\infty)$ を仮定する．

(i) $f''(s) < 0\ (s > 0)$ ならば (1.4) が成り立つ．

(ii) $f''(s) > 0\ (s > 0)$ ならば (1.5) が成り立つ．

注意 1.3. 条件 (F) を仮定する．

(i) (1.4) ならば (1.2) が成り立つ．

(ii) (1.5) ならば (1.3) が成り立つ．

従って，(1.4) や (1.5) より (1.2) や (1.3) のほうがよりよい条件である．

問題 1.2. 注意 1.1 を確認せよ．

問題 1.3. 注意 1.2 の (i) を証明せよ．(ヒント: 微分法により，$g(s) := [f(s)]^2 - F(s)f'(s) > 0$ $(s > 0)$ を示す.)

問題 1.4. 条件 (F) を仮定する．$G(s) = \sqrt{F(s)}$ とおく．

(1) $G''(s)$ を求めよ．

(2) 次を証明せよ．

$$G'(s)\int_0^s \int_t^s G''(u)dudt + sG(s)G''(s) = sf'(s) - f(s) \quad (s > 0).$$

(3) 注意 1.3 の (i) を証明せよ．

---

*条件 (F) において，$f(s) > 0\ (s > 0)$ という条件は過剰である．即ち，それ以外の (F) の条件を仮定すれば，それが導かれる．しかし，ここでは $f(s) > 0$ であることをわかりやすくするため，(F) にそれを加えておく．

$f_0,\,f_\infty \in [0,\infty]$ を次の極限

$$f_0 := \lim_{s\to+0} f(s)/s, \quad f_\infty := \lim_{s\to\infty} f(s)/s$$

とする. (1.2) や (1.3) の場合は, $f(s)/s$ が単調なのでこのような極限は存在する.

注意 1.4. 条件 (F) が成り立つとき, ロピタルの定理より,

$$f_0 = f'(0)$$

が成り立つ. 従って, 条件 (F) を仮定すると, f_0 は存在して, $0 \leqq f_0 < \infty$ である. また, $f'(\infty) := \lim\limits_{s\to\infty} f'(s) \in (0,\infty)$ が存在するならば, 上とまったく同様にして

$$f_\infty = f'(\infty) \tag{1.6}$$

が成り立つ. (F), (1.3) かつ $f'(\infty)=\infty$ であっても, (1.6) は成立する (問題 1.5).

問題 1.5. (F), (1.3) かつ $f'(\infty)=\infty$ のとき, (1.6) を証明せよ.

2. 準備

以下, 関数 $f(s)$ の定義域 $[0,\infty)$ を次の様に $\mathbf{R}$ へ拡張する.

$$f(s) = \begin{cases} f(s) & (s \geqq 0), \\ -f(-s) & (s<0). \end{cases} \tag{2.1}$$

条件 (F) が成り立つとき, $f \in C^1(\mathbf{R})$ である. 実際, $f'(s)$ が $s \neq 0$ で連続であることは明らかであるし,

$$\lim_{s\to-0} f'(s) = \lim_{s\to-0}(-f(-s))' = \lim_{s\to-0} f'(-s) = f'(0) = \lim_{s\to+0} f'(s)$$

であるから, $f'(s)$ は $s=0$ でも連続である.

定理 2.1 (初期値問題の解の存在と一意性)**.** $f \in C^1(\mathbf{R})$, $sf(s) > 0$ $(s \neq 0)$, $h \in C^1[a,b]$, $h(x) > 0$ $(a \leqq x \leqq b)$ を仮定する. α, β を定数, $x_0 \in [a,b]$ とする. そのとき, 初期値問題

$$\begin{cases} u'' + h(x)f(u) = 0, \\ u(x_0) = \alpha, \quad u'(x_0) = \beta \end{cases} \tag{2.2}$$

の解は区間 $[a,b]$ で存在して一意である.

定理 2.1 の証明は後述の付録を参照してほしい.

注意 2.1. (i) 定理 2.1 では関数 $f(s)$ は C^1 級であることを仮定しているが, $f(s)$ が連続であれば (2.2) の解が $x=x_0$ の近くで存在することが知られている (ペアノ (Peano) の存在定理). しかし, $f(s)$ が連続であるだけでは, (2.2) の解の一意性は保証されない. 例えば, 初期値問題

$$\begin{cases} u'' - 6u^{1/3} = 0 \\ u(0)=0, \quad u'(0)=0 \end{cases}$$

は 2 個の解 $u_1(x)=0$, $u_2(x)=x^3$ をもつ. このとき, $f(s) = -6s^{1/3}$ は $[0,\infty)$ で連続であるが, $s=0$ で微分可能ではない. 関数 $f(s)$ が C^1 級であることもより弱い条件であるリプシッツ (Lipschitz) 条件を満たせば (2.2) の解の一意性が成り立つことが知られている.

(ii) 定理 2.1 では関数 h が $h(x) > 0$ $(a \leqq x \leqq b)$ であることを仮定している. $h(x) < 0$ $(a \leqq x \leqq b)$ かつ (F) の場合, 境界値問題 (1.1) は正値解をもたない. 実際, もし, 正値解 u が存在したとすると, $u(x_1) = \max_{a\leqq x\leqq b} u(x)$ を満たす点 $x_1 \in (a,b)$ は $u''(x_1) \leqq 0$ を満たさなければならないが, $u''(x) = -h(x)f(u(x))$ であるので, $h(x)<0$ かつ (F) の場合は矛盾が生じる.

(iii) さらに, $h(x) < 0$ $(a \leqq x \leqq b)$ の場合, (2.2) の解で $[a,b]$ 全体では存在しないものがある. 例えば,

$$\begin{cases} u'' - 2u^3 = 0 \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 1 \end{cases}$$

は解 $u(x) = 1/(1-x)$ をもつが, この解は $x = 1$ では定義されない.

(iv) 後述の付録の定理 2.1 の証明と同じようにすれば, f が $\mathbf{R}$ 上でリプシッツ条件, 即ち, ある定数 $L > 0$ に対して,

$$|f(s) - f(t)| \leqq L|s-t| \quad (s,\ t \in \mathbf{R})$$

を満たし, かつ, $h \in C[a,b]$ という条件のみで, (2.2) の解は区間 $[a,b]$ で存在して一意であることを示すことができる. 例えば, $f \in C^1(\mathbf{R})$ で $f'(s)$ が $\mathbf{R}$ で有界であれば, 平均値の定理より, f は $\mathbf{R}$ 上でリプシッツ条件を満たす.

系 2.1. $f \in C^1(\mathbf{R})$, $sf(s) > 0$ $(s \neq 0)$, $h \in C^1[a,b]$, $h(x) > 0$ $(a \leqq x \leqq b)$, $a \leqq c \leqq b$ とする. u を $u'' + h(x)f(u) = 0$ の非自明解 (即ち, $u(x) \not\equiv 0$ である解) とする. そのとき $u(c) = 0$ ならば $u'(c) \neq 0$ である.

証明. 最初に $f \in C^1(\mathbf{R})$, $sf(s) > 0$ $(s \neq 0)$ より $f(0) = 0$ であることに注意する. $u'(c) = 0$ と仮定する. そのとき, $u(x) \equiv 0$ は初期値問題

$$\begin{cases} u'' + h(x)f(u) = 0, \\ u(c) = u'(c) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

の解である. 定理 2.1 より $u(x) \equiv 0$ 以外に (2.3) の解はない. これは矛盾であるから, $u'(c) \neq 0$ を得る. $\square$

関数 $u(x)$ に対して, $u(c) = 0$ となる c を u の**零点**という.

系 2.2. $f \in C^1(\mathbf{R})$, $sf(s) > 0$ $(s \neq 0)$, $h \in C^1[a,b]$, $h(x) > 0$ $(a \leqq x \leqq b)$ とする. u が $u'' + h(x)f(u) = 0$ の区間 $[a,b]$ における非自明解 $(u(x) \not\equiv 0)$ ならば, u の区間 $[a,b]$ 内の零点は有限個である.

証明. もし, u が区間 $[a,b]$ 内に無限個の零点 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ をもつと仮定する. 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界であるから, 収束する部分列をもつ. その収束部分列も同じ記号 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で表すことにする. 従って, ある $c \in [a,b]$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c, \quad u(x_n) = 0 \ \ (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ. ロルの定理より, x_n と x_{n+1} の間に $u'(t_n) = 0$ となる t_n が存在する. このとき, $\lim_{n\to\infty} t_n = c$ である. $u(x_n) = u'(t_n) = 0$ であるから

$$u(c) = \lim_{n\to\infty} u(x_n) = 0, \quad u'(c) = \lim_{n\to\infty} u'(t_n) = 0.$$

系 2.1 の証明と同様に, 定理 2.1 より, $u(x) \equiv 0$ となり, これは矛盾である. $\square$

次の結果もよく知られている.

定理 2.2 (初期値とパラメータに関する解の微分可能性)**.** α, β, λ を定数, $f \in C^1(\mathbf{R})$, $sf(s) > 0$ $(s \neq 0)$, $h \in C^1[a,b]$, $h(x) > 0$ $(a \leqq x \leqq b)$, $a \leqq x_0 \leqq b$ とする. そのとき, 初期値問題

$$\begin{cases} u'' + \lambda h(x)f(u) = 0, \\ u(x_0) = \alpha, \quad u'(x_0) = \beta \end{cases}$$

の解 $u(x, \alpha, \beta, \lambda)$ は $(x, \alpha, \beta, \lambda) \in [a,b] \times \mathbf{R}^3$ に関して C^1 級である.

3. shooting method (狙い撃ち法)

境界値問題 (1.1) の話に戻る．以下, 正値解 $u(x) > 0$ $(0 < x < 1)$ のみを取り扱う．符号変化する解も考えることができるが, 正値解に比べその解析は困難を伴う．そこで, 次の問題

$$
\text{(P)} \qquad \begin{cases} u'' + h(x)f(u) = 0 \quad (0 < x < 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ u(x) > 0 \quad (0 < x < 1) \end{cases}
$$

を考える．ここで, $h \in C^1[0,1]$ である．まず最初に, $h(x) \equiv 1$ である問題

$$
\text{(P}_1\text{)} \qquad \begin{cases} u'' + f(u) = 0 \quad (0 < x < 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ u(x) > 0 \quad (0 < x < 1) \end{cases}
$$

について考えることにする．

定理 2.1 より, 初期値問題

$$
\begin{cases} u'' + f(u) = 0 \quad (0 < x < 1), \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = \alpha > 0 \end{cases}
$$

の解は存在して一意である．そこでその解を $u(x, \alpha)$ で表すことにする．

補題 3.1. $\lambda > 0$, f は条件 (F) を満たすとする．そのとき u が

$$
u'' + \lambda f(u) \leqq 0 \ \ (x > 0), \quad u(0) \geqq 0, \ u'(0) > 0
$$

を満たすならば, u は区間 $(0, \infty)$ 内に零点をもつ．

証明. 背理法により示す．$u(x) > 0$ $(x > 0)$ と仮定する．

$$
u'' \leqq -\lambda f(u) < 0 \quad (x > 0). \tag{3.1}
$$

よって, u' は区間 $(0, \infty)$ で減少する．$u'(0) > 0$ より, 次の (i), (ii) のどちらか一方が成り立つ．

(i) ある $x_1 > 0$ に対して, $u'(x_1) = 0$.

(ii) $u'(x) > 0$ $(x \geqq 0)$.

(i) を仮定する．$x_2 = x_1 + 1$ とおく, u' は狭義減少なので $u'(x_2) < u'(x_1) = 0$. さらに

$$
u'(x) \leqq u'(x_2) \quad (x \geqq x_2).
$$

これを区間 $[x_2, x]$ 上積分すると

$$
u(x) - u(x_2) \leqq u'(x_2)(x - x_2) \quad (x \geqq x_2)
$$

を得る．$x \to \infty$ とすると, $u'(x_2) < 0$ より, $\lim_{x\to\infty} u(x) = -\infty$ を得る．これは $u(x) > 0$ $(x > 0)$ に矛盾する．

(ii) を仮定する．u は区間 $[0, \infty)$ 上増加であるから,

$$
u(x) \geqq u(1) > 0 \quad (x \geqq 1).
$$

従って,

$$
f(u(x)) \geqq f(u(1)) > 0 \quad (x \geqq 1).
$$

(3.1) より,

$$
u'' \leqq -\lambda f(u(1)) \quad (x \geqq 1).
$$

これを区間 $[1, x]$ 上積分すると

$$
u'(x) - u'(1) \leqq -\lambda f(u(1))(x - 1) \quad (x \geqq 1).
$$

$x \to \infty$ とすると, $\lim_{x\to\infty} u'(x) = -\infty$ を得る．これは $u'(x) > 0$ $(x > 0)$ に矛盾する． □

補題 3.1 より, $u(x,\alpha)$ は区間 $(0,\infty)$ に零点をもつ. $u(x,\alpha)$ の区間 $(0,\infty)$ での最小の零点を $Z(\alpha)$ で表すことにする. そのとき次が成り立つ.

命題 3.1. $u(x,\alpha)$ が (P_1) の解であること, $Z(\alpha)=1$ であることは同値である.

$Z(\alpha)$ の挙動を調べることにより, 2 点境界値問題の解構造を調べる方法を **shooting method** (狙い撃ち法) という.

4. 自励系の問題の解の対称性

$u=u(x,\alpha)$ は

$$u''=-f(u)<0 \quad (0<x<Z(\alpha))$$

を満たすので, $(0,Z(\alpha))$ で上に凸であり, $(0,Z(\alpha))$ 内にただ一つ極大点をもつ. その極大点を $T(\alpha)$ と表す. そのとき

$$u'(T(\alpha),\alpha)=0$$

が成り立つ.

定理 4.1. $\alpha>0$ を固定する. $u=u(x,\alpha)$ の xu 平面におけるグラフは $x=T(\alpha)$ に対して線対称である. 従って, $Z(\alpha)=2T(\alpha)$ が成り立つ.

証明. 簡単のため, $u=u(x,\alpha)$, $T=T(\alpha)$, $Z=Z(\alpha)$ と表す. $w(x)=u(2T-x)$ とおく. そのとき, w は

$$w''+f(w)=0, \quad w(T)=u(T), \quad w'(T)=0=u'(T)$$

を満たす. 従って, 初期値問題の一意性 (定理 2.1) より, $u(x)\equiv w(x)$ が成り立つ. これは, $u=u(x)$ のグラフは $x=T(\alpha)$ に対して線対称であることを意味する. □

5. time-map 公式

次の関数

$$F(s)=2\int_0^s f(t)dt$$

を導入する. * そのとき, $F(0)=0$ であり, 微分積分学の基本定理より,

$$F'(s)=2f(s)>0 \quad (s>0).$$

従って, $F(s)$ は狭義増加関数である. さらに, 条件 (F) より, $\lim_{s\to\infty}F(s)=\infty$ が導かれる (問題 5.1).

問題 5.1. 条件 (F) を仮定するとき, $\displaystyle\lim_{s\to\infty}F(s)=\infty$ が成り立つことを証明せよ.

$F(s)$ は狭義単調増加なので, F の逆関数 F^{-1} が存在する. F^{-1} も狭義単調増加であり, その定義域は問題 5.1 より, $[0,\infty)$ である.

いま, $u=u(x,\alpha)$ に関する time-map 公式と呼ばれるものを導こう. 次の関係

$$\begin{aligned}\left[(u'(x))^2+F(u(x))\right]' &= 2u'(x)u''(x)+F'(u(x))u'(x)\\ &= 2u'(x)[u''(x)+f(u(x))]=0\end{aligned}$$

より, 関数 $(u'(x))^2+F(u(x))$ は定数関数である. 従って, $(u'(0))^2+F(u(0))=\alpha^2$ より,

$$(u'(x))^2+F(u(x))=\alpha^2. \tag{5.1}$$

よって,

$$(u'(x))^2=\alpha^2-F(u(x)).$$

区間 $[0,T(\alpha))$ において $u'(x)>0$ より,

$$u'(x)=\sqrt{\alpha^2-F(u(x))}>0 \quad (0\leqq x<T(\alpha)).$$

*他書では $F(s)=\int_0^s f(t)dt$ と定義していることも多い.

即ち,

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{\alpha^2 - F(u(x))}} = 1 \quad (0 \leqq x < T(\alpha)).$$

これを区間 $[0, x]$ 上積分すると

$$x = \int_0^x \frac{u'(t)}{\sqrt{\alpha^2 - F(u(t))}} dt \quad (0 \leqq x < T(\alpha)).$$

さらに $s = u(t)$ と置換積分を行うと,

$$x = \int_0^{u(x)} \frac{ds}{\sqrt{\alpha^2 - F(s)}} \quad (0 \leqq x < T(\alpha))$$

を得る. $x \to T(\alpha)$ とすると,

$$T(\alpha) = \int_0^{u(T(\alpha))} \frac{ds}{\sqrt{\alpha^2 - F(s)}}.$$

(5.1) に $x = T(\alpha)$ を代入し, $u'(T(\alpha)) = 0$ に注意すると $F(u(T(\alpha))) = \alpha^2$ であるから

$$u(T(\alpha)) = F^{-1}(\alpha^2)$$

を得る. 定理 4.1 より, $Z(\alpha) = 2T(\alpha)$ なので

$$Z(\alpha) = 2\int_0^{F^{-1}(\alpha^2)} \frac{ds}{\sqrt{\alpha^2 - F(s)}} \tag{5.2}$$

を得る. これは **time-map 公式**と呼ばれている.

問題 5.2. $f(s) = s$ のとき, time-map 公式 (5.2) を利用して, $Z(\alpha)$ を求めよ. ただし, 答えはなるべく簡単な形で答えること.

問題 5.3. $f(s) = e^s$ のとき, time-map 公式 (5.2) を利用して,

$$Z(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 + 2}} \log(\alpha\sqrt{\alpha^2 + 2} + \alpha^2 + 1) \tag{5.3}$$

を証明せよ. (ヒント: 例えば $t = \sqrt{\alpha^2 - 2e^s + 2}$ と置換積分する.)

6. 変換された time-map 公式

前節で time-map 公式 (5.2) を得たが, この節ではもうすこし使いやすい形に変形する.

$$g(s) = F^{-1}(s^2) \quad (s \geqq 0)$$

とおく. time-map 公式 (5.2) で $s = g(\alpha \sin t)$ と置換積分を行うと

$$Z(\alpha) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(\alpha \sin t) dt \tag{6.1}$$

を得る. これを, **変換された time-map 公式** と呼ぶことにする.

問題 6.1. $f(s) = s$ のとき, 公式 (6.1) を利用して $Z(\alpha)$ を求めよ.

問題 6.2. $f(s) = s^p$ $(p > 1)$ のとき, (6.1) を利用して, ある定数 $C > 0$, $q > 0$ に対して, $Z(\alpha) = C\alpha^{-q}$ であることを証明せよ. また, このときの, C, q を求めよ. ただし, C は積分の形のままでよい.

問題 6.3. $f(s) = e^s$ のとき, (6.1) を利用して, (5.3) を導け. (ヒント: 例えば, $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ としてから, $s = \alpha \cos t$ と置換積分する.)

$t=\pi-s$ と置換することにより

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(\alpha\sin t)dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g'(\alpha\sin t)dt \tag{6.2}$$

を得るので, (6.1) は

$$Z(\alpha) = \int_0^{\pi} g'(\alpha\sin t)dt \tag{6.3}$$

と表すこともできる.

問題 6.4. 式 (6.2) を示し, 公式 (6.1) から, (6.3) を証明せよ.

7. 零点の挙動

公式 (6.1) を使って, $Z(\alpha)$ の挙動を調べよう. そのために, g の性質を調べる. まず,

$$g(0)=0, \quad g(s)>0 \quad (s>0)$$

が成り立つ. また, $F(g(s))=s^2$ であるから, これを両辺微分することにより,

$$g'(s)=\frac{s}{f(g(s))}>0 \quad (s>0)$$

を得る. よって, $\sqrt{F(g(s))}=s$ より

$$g'(s)=\frac{\sqrt{F(g(s))}}{f(g(s))}>0 \quad (s>0).$$

ここで $t=g(s)$ とおいて両辺を 2 乗すると,

$$[g'(s)]^2=\frac{F(t)}{[f(t)]^2}. \tag{7.1}$$

$s\to 0$ のとき $t\to 0$ であることに注意すると, ロピタルの定理より, $f_0>0$ のとき,

$$\lim_{s\to 0}[g'(s)]^2=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{f(t)}\right)^2\frac{F(t)}{t^2}=\frac{1}{f_0^2}\lim_{t\to 0}\frac{2f(t)}{2t}=\frac{1}{f_0^2}f_0=\frac{1}{f_0}.$$

$f_0=0$ のときは, ロピタルの定理と注意 1.4 より $f'(0)=f_0=0$ であるから,

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{[g'(s)]^2}=\lim_{t\to 0}\frac{[f(t)]^2}{F(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{2f(t)f'(t)}{2f(t)}=\lim_{t\to 0}f'(t)=0=f_0.$$

以上をまとめると

$$g'(0)=\frac{1}{\sqrt{f_0}} \tag{7.2}$$

を得る. ただし, ここで, $1/0=\infty$ とする. 同様に $s\to 0$ の替わりに $s\to\infty$ とすると, $f_\infty\in(0,\infty)$ が存在するとき,

$$g'(\infty)=\frac{1}{\sqrt{f_\infty}} \tag{7.3}$$

が成り立つ. $f_\infty=\infty$ のときも, $1/\infty=0$ として, (7.3) は成り立つ (問題 7.2). $f_\infty=0$ のとき, $f'(\infty)=0$ ならば, $f_0=0$ ときと同様に, $1/0=\infty$ として, (7.3) は成立する.

注意 7.1. $f_\infty=0$ のとき, (1.2) を仮定すると, $f'(\infty)=0$ が成り立つ. 実際, 注意 1.1 より, $0<f'(s)<f(s)/s$ $(s>0)$ であるから, この不等式で $s\to\infty$ とすると, $f'(\infty)=0$ を得る.

問題 7.1. (F) のとき, $F(s)\leqq 2sf(s)$ $(s\geqq 0)$ を示せ.

問題 7.2. (F) かつ $f_\infty=\infty$ のとき, $g'(\infty)=0$ を示せ. (ヒント: (7.1) と問題 7.1 を使う.)

定理 7.1. 条件 (F) を仮定する．そのとき次が成り立つ．

$$\lim_{\alpha\to+0} Z(\alpha) = \frac{\pi}{\sqrt{f_0}}.$$

ただし, 上において $1/0=\infty$ とする．

定理 7.2. 条件 (F) と $f_\infty \in [0,\infty]$ の存在を仮定する．さらに $f_\infty = 0$ のときは $f'(\infty)=0$ も仮定する．そのとき次が成り立つ．

$$\lim_{\alpha\to\infty} Z(\alpha) = \frac{\pi}{\sqrt{f_\infty}}.$$

ただし, 上において $1/0=\infty$, $1/\infty = 0$ とする．

定理 7.1, 7.2 の証明. 定理 7.1 のみを示す． 定理 7.2 の証明もほとんど同様である． (6.1) で $\alpha \to +0$ とすると, (7.2) とルベーグの収束定理より, $f_0 > 0$ ならば

$$\lim_{\alpha\to+0} Z(\alpha) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(0)dt = \pi g'(0) = \frac{\pi}{\sqrt{f_0}}.$$

$f_0 = 0$ を仮定する．(7.2) より, $\lim\limits_{s\to 0} g'(s) = \infty$. 従って, 任意の $M>0$ に対して, 次の $\alpha_* > 0$ が存在する:

$$g'(s) \geqq M \quad (0 < s \leqq \alpha_*)$$

$0 < \alpha \leqq \alpha_*$ のとき, (6.1) より,

$$Z(\alpha) \geqq 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} g'(\alpha \sin t)dt \geqq 2 \min_{s\in[\alpha/2,\alpha]} g'(s) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dt \geqq \frac{2\pi}{3}M$$

これは $\lim\limits_{\alpha\to 0} Z(\alpha) = \infty$ を意味する． □

補題 7.1. $t = g(s)$ とおくとき,

$$g''(s) = \frac{[f(t)]^2 - F(t)f'(t)}{[f(t)]^3}.$$

証明. (7.1) の両辺を s について微分すると,

$$2g'(s)g''(s) = \frac{d}{dt}\left(\frac{F(t)}{[f(t)]^2}\right)\frac{dt}{ds} = \frac{F'(t)[f(t)]^2 - F(t)([f(t)]^2)'}{[f(t)]^4}\cdot g'(s).$$

両辺を $2g'(s)$ で割ると,

$$g''(s) = \frac{2f(t)[f(t)]^2 - F(t)\cdot 2f(t)f'(t)}{2[f(t)]^4} = \frac{[f(t)]^2 - F(t)f'(t)}{[f(t)]^3}.$$

□

定理 7.3. 条件 (F) を仮定する．

(i) (1.4) のとき, $Z'(\alpha) > 0$ $(\alpha > 0)$,
(ii) (1.5) のとき, $Z'(\alpha) < 0$ $(\alpha > 0)$.

証明. (6.1) の両辺を α について微分すると

$$Z'(\alpha) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g''(\alpha \sin t)\sin t\, dt.$$

補題 7.1 より, (i), (ii) を得る． □

8. 自励系の問題の正値解の存在と一意性

定理 7.1, 7.2, 7.3, 注意 1.3, 7.1 と命題 3.1 より, 次の 2 つの結果を得る.

定理 8.1. 条件 (F) と $f_\infty \in [0,\infty]$ の存在を仮定する. $f_\infty = 0$ のときは (1.2) も仮定する.

(i) $f_0 < \pi^2 < f_\infty$ ならば (P_1) は解をもつ.
(ii) $f_\infty < \pi^2 < f_0$ ならば (P_1) は解をもつ.

定理 8.2. 条件 (F) と $f_\infty \in [0,\infty]$ の存在を仮定する.

(I) (1.4) のとき,

(i) $f_\infty < \pi^2 < f_0$ ならば (P_1) はただ一つの解をもつ.
(ii) $f_\infty \geqq \pi^2$ または $\pi^2 \geqq f_0$ ならば (P_1) は解をもたない.

(II) (1.5) のとき,

(i) $f_0 < \pi^2 < f_\infty$ ならば (P_1) はただ一つの解をもつ.
(ii) $f_0 \geqq \pi^2$ または $\pi^2 \geqq f_\infty$ ならば (P_1) は解をもたない.

従って, この様な条件の下では, (P_1) の解の個数が完全にわかる.

9. 非自励系の問題

ここからは問題 (P) の解構造について考える. この節以降, $f(s)$ は条件 (F) を満たすと仮定し, 2 節と同様に関数 $f(s)$ の定義域を (2.1) により, $\mathbf{R}$ へ拡張しておく. 加えて, 関数 h は

$$h \in C^1[0,1], \quad h(x) > 0 \ \ (0 \leqq x \leqq 1)$$

を満たすものとする. また,

$$h_* = \min_{0\leqq x\leqq 1} h(x), \quad h^* = \max_{0\leqq x\leqq 1} h(x)$$

とおく. この節以降, 関数 $h(x)$ の定義域を次の様に $[0,\infty)$ へ延長しておく.

$$h(x) = \begin{cases} h(x) & (0 \leqq x \leqq 1), \\ h(1) & (x > 1). \end{cases}$$

そのとき,

$$0 < h_* \leqq h(x) \leqq h^* \quad (x \geqq 0)$$

である. 3 節と同様に $u(x,\alpha)$ を初期値問題

$$\begin{cases} u'' + h(x)f(u) = 0, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = \alpha > 0 \end{cases} \tag{9.1}$$

の解とする.

命題 9.1. 任意の $\alpha > 0$ に対して, $u(x,\alpha)$ は区間 $(0,\infty)$ 内に零点をもつ.

証明. $u(x) = u(x,\alpha)$ とおく. もし, $u(x)$ が区間 $(0,\infty)$ 内に零点をもたないと仮定すると,

$$u(x) > 0 \quad (x > 0)$$

が成り立つ. そのとき,

$$u'' + h_* f(u) \leqq 0 \quad (x > 0)$$

が成り立つ. 補題 3.1 より, u は $(0,\infty)$ 内に零点をもつ. これは矛盾である. よって, $u(x)$ は区間 $(0,\infty)$ 内に零点をもつ. □

命題 9.1 より, $u(x,\alpha)$ は区間 $(0,\infty)$ に零点をもつので, $u(x,\alpha)$ の区間 $(0,\infty)$ 内の最小の零点を $Z(\alpha)$ とおく. そのとき,

$$u(x,\alpha) > 0 \ (0 < x < Z(\alpha)), \quad u(Z(\alpha),\alpha) = 0 \tag{9.2}$$

が成り立つ. 微分方程式の一般論である初期値に関する解の微分可能性により, $u(x,\alpha)$ は $(x,\alpha) \in [0,\infty) \times (0,\infty)$ に関して C^1 級である. 系 2.1 と (9.2) より, $\frac{\partial}{\partial x} u(Z(\alpha),\alpha) = u'(Z(\alpha),\alpha) < 0$ である. いま, $x = Z(\alpha)$ が $u(x,\alpha) = 0$ の陰関数になっていることに注意すると, 陰関数定理より $Z \in C^1(0,\infty)$ であることがわかる.

命題 3.1 と同様に, $u(x,\alpha)$ が (P) の解であることと, $Z(\alpha) = 1$ は同値であることにも注意しておく.

10. エネルギー関数

第 5 節と同様に

$$F(s) = 2\int_0^s f(t)dt$$

とおく. 条件 (F) により

$$F(s) \geqq 0 \quad (s \in \mathbf{R})$$

が成り立つことに注意する (問題 10.1).

問題 10.1. (2.1) のとき, $F(-s) = F(s)$, $s > 0$, 即ち, $F(s)$ は偶関数であることを証明せよ. (ヒント: 例えば, $F(-s)$ において, $-t = \tau$ と置換積分する.)

いま,

$$E[u](x) = [u'(x)]^2 + h(x)F(u(x)) \tag{10.1}$$

とおく. この $E[u](x)$ は, u のエネルギー関数と呼ばれている. さらに

$$H = \max_{0 \leqq x \leqq 1} \frac{|h'(x)|}{h(x)}$$

とおく. そのとき, 等式 (5.1) の一般化である次の評価が得られる.

定理 10.1. *$u = u(x,\alpha)$ のとき, 次が成り立つ.*

$$e^{-H}\alpha^2 \leqq E[u](x) \leqq e^H \alpha^2 \quad (x \geqq 0).$$

証明. 簡単のため, $E[u](x) = E(x)$ とおく. $x \geqq 0$, $x \neq 1$ のとき

$$E'(x) = h'(x)F(u(x)).$$

よって,

$$E'(x) = \begin{cases} h'(x)F(u(x)) & (0 \leqq x < 1), \\ 0 & (x > 1). \end{cases}$$

一方, (10.1) より, $E(x) \geqq h(x)F(u(x))$ であるから,

$$F(u(x)) \leqq \frac{1}{h(x)} E(x).$$

従って,

$$|E'(x)| \leqq \frac{|h'(x)|}{h(x)} E(x) \leqq HE(x) \quad (0 \leqq x < 1).$$

即ち,

$$-HE(x) \leqq E'(x) \leqq HE(x) \quad (0 \leqq x < 1).$$

これにより,

$$(e^{Hx}E(x))' \geqq 0, \quad (e^{-Hx}E(x))' \leqq 0 \quad (0 \leqq x < 1)$$

が成り立つ. よって $e^{Hx}E(x)$ は非減少なので

$$e^{Hx}E(x) \geqq E(0) = \alpha^2 \quad (0 \leqq x < 1).$$

従って,

$$E(x) \geqq e^{-Hx}\alpha^2 \geqq e^{-H}\alpha^2 \quad (0 \leqq x < 1).$$

$x \to 1$ とすれば, この式は $x = 1$ のときも成立しているので,

$$E(x) \geqq e^{-H}\alpha^2 \quad (0 \leqq x \leqq 1). \tag{10.2}$$

$x > 1$ のとき, $(E(x))' = 0$ より,

$$E(x) = E(s) \quad (x > s > 1).$$

$s \to 1$ とすれば (10.2) より

$$E(x) = E(1) \geqq e^{-H}\alpha^2 \quad (x > 1).$$

以上より

$$E(x) \geqq e^{-H}\alpha^2 \quad (x \geqq 0)$$

が成り立つ. 同様に, $(e^{-Hx}E(x))' \leqq 0$ から

$$E(x) \leqq e^{H}\alpha^2 \quad (x \geqq 0)$$

も導くことができる. □

系 10.1.

$$0 < u(x,\alpha) \leqq F^{-1}\left(\frac{e^H}{h_*}\alpha^2\right) \quad (0 < x < Z(\alpha)).$$

証明. $u(x,\alpha) > 0$ $(0 < x < Z(\alpha))$ であることは明らかである. 定理 10.1 より,

$$h_*F(u(x,\alpha)) \leqq [u'(x,\alpha)]^2 + h(x)F(u(x,\alpha)) \leqq e^H\alpha^2.$$

よって

$$F(u(x,\alpha)) \leqq \frac{e^H}{h_*}\alpha^2.$$

これは

$$u(x,\alpha) \leqq F^{-1}\left(\frac{e^H}{h_*}\alpha^2\right)$$

を意味する. □

補題 10.1. $M > 0$ かつ

$$\alpha > \sqrt{h^*e^HF(M)} \tag{10.3}$$

とする. また,

$$\delta = M\Big(e^{-H}\alpha^2 - h^*F(M)\Big)^{-1/2} \tag{10.4}$$

とおく. そのとき, 次の (i), (ii), (iii) が成り立つ:

(i) $T(\alpha) \in (0, Z(\alpha))$ を $u'(T(\alpha),\alpha) = 0$ を満たすものとするとき, $u(T(\alpha),\alpha) > M$.
(ii) $x_1, x_2 \in [0, Z(\alpha)]$ に対して, $u(x,\alpha) \leqq M$ $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$ ならば $x_2 - x_1 \leqq \delta$.
(iii) $Z(\alpha) > 2\delta$ ならば $u(x,\alpha) > M$ $(\delta < x < Z(\alpha) - \delta)$.

証明. $u = u(x, \alpha)$ とおく.

(i) $u'(T(\alpha)) = 0$ であるから,

$$E[u](T(\alpha)) = h(T(\alpha))F(u(T(\alpha), \alpha)) \leqq h^* F(u(T(\alpha))).$$

定理 10.1 より, (10.3) であるから,

$$E[u](T(\alpha)) \geqq e^{-H}\alpha^2 > h^* F(M).$$

従って, $h^* F(u(T(\alpha))) > h^* F(M)$, 即ち, $F(u(T(\alpha))) > F(M)$. これから, $u(T(\alpha)) > M$ を得る.

(ii) 定理 10.1 より,

$$e^{-H}\alpha^2 \leqq E[u](x) \leqq [u'(x)]^2 + h^* F(M) \quad (x_1 \leqq x \leqq x_2).$$

従って,

$$|u'(x)| \geqq \Big(e^{-H}\alpha^2 - h^* F(M)\Big)^{1/2} = \frac{M}{\delta} \quad (x_1 \leqq x \leqq x_2).$$

よって, $[x_1, x_2]$ において, $u'(x) \geqq M/\delta$ であるか $-u'(x) \geqq M/\delta$ であるかのどちらかである. もし $u'(x) \geqq M/\delta$ ならば

$$M \geqq u(x_2) = u(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} u'(x)dx \geqq \frac{M}{\delta}(x_2 - x_1)$$

であるから $x_2 - x_1 \leqq \delta$ を得る. $-u'(x) \geqq M/\delta$ の場合も

$$M \geqq u(x_1) = u(x_2) - \int_{x_1}^{x_2} u'(x)dx \geqq \frac{M}{\delta}(x_2 - x_1)$$

であるから $x_2 - x_1 \leqq \delta$ を得る.

(iii) ある $c \in (\delta, Z(\alpha) - \delta)$ に対して, $u(c) \leqq M$ であると仮定する. 最初に $u'(c) \geqq 0$ の場合を考える. $u''(x) = -h(x)f(u(x)) < 0$ $(0 < x < Z(\alpha))$ より, u' は $[0, Z(\alpha)]$ において減少関数であることに注意する. 従って, $u'(x) \geqq u'(c) \geqq 0$ $(0 \leqq x \leqq c)$ であり u は $[0, c]$ で非減少であるから, $0 \leqq u(x) \leqq u(c) \leqq M$ $(0 \leqq x \leqq c)$. よって (ii) より, $c \leqq \delta$ となるが, これは $c \in (\delta, Z(\alpha) - \delta)$ に矛盾する.

次に $u'(c) < 0$ の場合を考える. u' は減少関数であったので, $u'(x) \leqq u'(c) < 0$ $(c \leqq x \leqq Z(\alpha))$. 即ち, u は $[c, Z(\alpha)]$ で減少関数であるから, $0 \leqq u(x) \leqq u(c) \leqq M$ $(c \leqq x \leqq Z(\alpha))$. (ii) より, $Z(\alpha) - c \leqq \delta$ となるがこれも $c \in (\delta, Z(\alpha) - \delta)$ に矛盾する. 以上より, $u(x, \alpha) > M$ $\delta < x < Z(\alpha) - \delta$. □

11. スツルムの比較定理

この節では, 線形微分方程式の性質の１つであるスツルムの比較定理を紹介する. まず, 基本的な事実である次の定理をあげる.

定理 11.1. $q \in C[x_1, x_2]$ を仮定する. α, β を定数, $x_0 \in [x_1, x_2]$ とする. そのとき, 初期値問題

$$\begin{cases} v'' + q(x)v = 0, \\ v(x_0) = \alpha, \quad v'(x_0) = \beta \end{cases} \tag{11.1}$$

の解は区間 $[x_1, x_2]$ で存在して一意である.

定理 11.2 の証明は後述の付録を参照してほしい.

定理 11.2 (スツルムの比較定理)**.** h, $H \in C[x_1, x_2]$ かつ

$$q(x) < Q(x) \quad (x_1 < x < x_2)$$

を仮定する. v を

$$v'' + q(x)v = 0 \tag{11.2}$$

の非自明解 ($v(x) \not\equiv 0$) で $v(x_1) = v(x_2) = 0$ を満たすものとする．そのとき,

$$V'' + Q(x)V = 0$$

の任意の解 V は区間 (x_1, x_2) 内に零点をもつ.

証明. 区間 (x_1, x_2) で零点をもたないような $V''+Q(x)V = 0$ の解 V が存在すると仮定する．そのとき, 区間 (x_1, x_2) で $V(x) > 0$ または $Q(x) < 0$ である．一般性を失うことなく, 区間 (x_1, x_2) で $Q(x) > 0$ としてよい．(もし, 区間 (x_1, x_2) で $V(x) < 0$ ならば, $U = -V$ は $V''+Q(x)V = 0$ の解で区間 (x_1, x_2) で $U(x) > 0$ となる.) $v(x)$ の区間 $(x_1, x_2]$ 内の最小の零点を x_3 とする．V と同様に区間 (x_1, x_3) において $v(x) > 0$ としても一般性を失わない．そのとき, $x \in (x_1, x_2)$ に対して,

$$(v'V - vV')' = v''V - vV'' = [Q(x) - q(x)]vV$$

であるので, これを区間 (x_1, x_3) 上積分すると,

$$v'(x_3)V(x_3) - v'(x_1)V(x_1) > 0 \tag{11.3}$$

を得る．定理 11.1 より, $v'(x_1) > 0$, $v'(x_3) < 0$ である．実際, $v'(x_1) \leqq 0$ と仮定すると, (x_1, x_3) で $v(x) > 0$ であるから, $v'(x_1) = 0$ でなければならないが, 定理 11.1 より, $v(x) \equiv 0$ となってしまい矛盾が生じる．$v'(x_3) < 0$ の理由も同様である．また, $V(x_1) \geqq 0$, $V(x_3) \geqq 0$ であるが, これは (11.3) に矛盾する．よって, V は区間 (x_1, x_2) 内に零点をもつ. □

スツルムの比較定理 (定理 11.2) の証明と同様の方法で次を示すことができる (問題 11.1).

定理 11.3. $q \in C[x_1, x_2]$ とする．v を (11.2) の非自明解で $v(x_1) = v(x_2) = 0$ を満たすものとする．そのとき, 任意の (11.2) の解は区間 $(x_1, x_2]$ 内に零点をもつ.

問題 11.1. 定理 11.3 を証明せよ.

12. 第一固有値

この節以降も, $h(x)$ は第 9 節で仮定したものとする.
次の問題

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda h(x)\varphi = 0 \quad (0 < x < 1), \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \\ \varphi(x) > 0 \quad (0 < x < 1) \end{cases} \tag{L}$$

を考える．問題 (L) を満たす定数 λ と関数 φ が存在するとき, λ を (L) の**第一固有値**, φ をその**固有関数**と言う．[*] 以下, (L) の第一固有値を λ_1, その固有関数の一つを φ_1 と表す.

例 12.1. $h(x) \equiv 1$ のとき, $\lambda_1 = \pi^2$, $\varphi_1(x) = c\sin(\pi x)$ $(c > 0)$ である.

補題 12.1. $\lambda_1 > 0$.

証明. $\lambda_1 < 0$ と仮定する．スツルムの比較定理 (定理 11.2) より, $V'' = 0$ の任意の解 V は区間 $(0, 1)$ 内に零点をもたなければならない．一方, $V = 1$ は $V'' = 0$ の解であるが, 区間 $(0, 1)$ 内に零点をもたない．これは矛盾である．$\lambda_1 = 0$ と仮定すると, $\varphi'' + \lambda h(x)\varphi = 0$ の解は $\varphi(x) = c_1 x + c_2$ の形である．このうち $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ を満たすものは $\varphi(x) \equiv 0$ のみであるから, (L) は解をもたない．従って, $\lambda_1 \neq 0$ である．以上より, $\lambda_1 > 0$ でなければならない. □

---

[*]正確には (L) の条件 $\varphi(x) > 0$ $(0 < x < 1)$ を除いた問題が非自明解 φ をもつような最小の λ を第一固有値といい, そのときの非自明解 φ をその固有関数という.

$\lambda > 0$ に対して, $\varphi(x, \lambda)$ を初期値問題

$$\varphi'' + \lambda h(x)\varphi = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1$$

の解とする．初期値問題の解の存在と一意性 (定理 2.1) より $\varphi(x, \lambda)$ は存在する．命題 9.1 の証明とまったく同様の方法により, $\varphi(x, \lambda)$ は区間 $(0, \infty)$ 内に零点をもつことがわかる．そこで, $R(\lambda)$ を $\varphi(x, \lambda)$ の区間 $(0, \infty)$ 内の最小の零点とする．そのとき, 微分方程式の一般論より, $R(\lambda)$ は $\lambda > 0$ について連続であることがわかる．$\lambda > 0$ は (L) の第一固有値であることと $R(\lambda) = 1$ であることは同値である．

補題 12.2.

(i) $0 < \lambda < \pi^2/h^*$ ならば $R(\lambda) > 1$.
(ii) $\lambda > \pi^2/h_*$ ならば $R(\lambda) < 1$.

証明. $v(x) = \sin(\pi x)$ は

$$v'' + \pi^2 v = 0, \quad v(0) = v(1) = 0$$

の解である．従って, スツルムの比較定理 (定理 11.2) より, (i), (ii) が成立する． □

定理 12.1. 問題 (L) の第一固有値 λ_1 と固有関数 φ_1 は存在する．さらに λ_1 はただ一つであり,

$$\frac{\pi^2}{h^*} \leqq \lambda_1 \leqq \frac{\pi^2}{h_*}$$

が成り立つ．

証明. 補題 12.2 より, ある $\lambda_1 \in [\pi^2/h^*, \pi^2/h_*]$ に対して $R(\lambda_1) = 1$ が成り立つ．よって, λ_1 は (L) の第一固有値であり, $\varphi(x, \lambda_1)$ はその固有関数である．ある $\lambda_2 \neq \lambda_1$ に対して, $R(\lambda_2) = 1$ となると仮定する．補題 12.1 より $\lambda_2 > 0$. スツルムの比較定理 (定理 11.2) より, $R(\lambda_1) \neq R(\lambda_2)$ が成り立つ．これは $R(\lambda_1) = R(\lambda_2) = 1$ に矛盾する．よって, 第一固有値はただ一つである． □

補題 12.3. (i) $\lambda > \lambda_1$ ならば

$$v'' + \lambda h(x) v = 0 \tag{12.1}$$

の非自明解 v で $(0, 1)$ 内に 2 個の零点をもつものが存在する．

(ii) $\lambda < \lambda_1$ ならば (12.1) の解 v で $v(x) > 0$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ となるものが存在する．

証明. $\varepsilon \geqq 0$ は十分小さいとする．

(i) 初期条件 $v(\varepsilon) = 0, v'(\varepsilon) = 1$ を満たす (12.1) の解 v を考える．スツルムの比較定理により, v と固有関数 φ_1 を比較すると $\varepsilon = 0$ のとき, ある $z_0 \in (0, 1)$ に対して $v(z_0) = 0$ かつ $v'(z_0) < 0$ が成り立つ．初期値に関する解の連続性により, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, $v(z_\varepsilon) = 0$ かつ $v'(z_\varepsilon) < 0$ を満たす z_0 に十分近い数 z_ε が存在する．従って, v は $\varepsilon > 0$ が十分小さいとき, 2 個の零点 ε, $z_\varepsilon \in (0, 1)$ をもつ．

(ii) 初期条件 $v(0) = \varepsilon, v'(\varepsilon) = 1$ を満たす (12.1) の解 v を考える．スツルムの比較定理により, v と固有関数 φ_1 を比較すると $\varepsilon = 0$ のとき, $v(x) > 0$ $(0 < x \leqq 1)$ であることがわかる．初期値に関する解の連続性により, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, $v(x) > 0$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ が成り立つ． □

13. 第一固有値と零点の関係

定理 13.1. 条件 (F) を仮定する．

(i) $f(s)/s < \lambda_1$ $(s > 0)$ のとき, $Z(\alpha) > 1$ $(\alpha > 0)$, 従って, (P) は解なし．
(ii) $f(s)/s > \lambda_1$ $(s > 0)$ のとき, $Z(\alpha) < 1$ $(\alpha > 0)$, 従って, (P) は解なし．

証明. (i) のみを示す. (ii) もまったく同様に示すことができる. $u(x,\alpha)$ は

$$\begin{aligned}&u'' + h(x)\frac{f(u(x,\alpha))}{u(x,\alpha)}u = 0,\\&u(0) = u(Z(\alpha)) = 0,\\&u(x) > 0 \quad (0 < x < Z(\alpha))\end{aligned}$$

の解である. いま

$$h(x)\frac{f(u(x,\alpha))}{u(x,\alpha)} < \lambda_1 h(x) \quad (0 < x < Z(\alpha))$$

であるので, スツルムの比較定理 (定理 11.2) より $Z(\alpha) > 1$ を得る. □

注意 1.1, 1.2 と定理 13.1 より, 次が成り立つ.

系 13.1. 条件 (F) と $f_\infty \in [0,\infty]$ の存在を仮定する.

(i) (1.2) のとき, $f_\infty \geqq \lambda_1$ または $\lambda_1 \geqq f_0$ ならば, (P) は解をもたない.
(ii) (1.3) のとき, $f_0 \geqq \lambda_1$ または $\lambda_1 \geqq f_\infty$ ならば, (P) は解をもたない.

証明. (i) のみを示す. (ii) の証明もまったく同様である. (1.2) のとき, $f(s)/s$ は $(0,\infty)$ 上減少関数で

$$\lim_{s\to+0} f(s)/s = f_0, \quad \lim_{s\to\infty} f(s)/s = f_\infty$$

であるから $f(s)/s$ の $(0,\infty)$ における値域は (f_∞, f_0) である. 従って, 定理 13.1 より, $f_\infty \geqq \lambda_1$ または $\lambda_1 \geqq f_0$ ならば, (P) は解をもたない. □

定理 12.1 より, $h(x) \equiv 1$ のとき $\lambda_1 = \pi^2$ であるから, 注意 1.3 により, 系 13.1 は定理 8.2 の (I), (ii) と (II), (ii) を一般化したものになっている.

補題 13.1. 条件 (F) を仮定する. そのとき, 次の (i), (ii) を満たす $\alpha_* > 0$ が存在する.

(i) $f_0 > \lambda_1$ ならば $Z(\alpha) < 1$ $(0 < \alpha \leqq \alpha_*)$.
(ii) $f_0 < \lambda_1$ ならば $Z(\alpha) > 1$ $(0 < \alpha \leqq \alpha_*)$.

証明. (i) のみを示す. (ii) も同様に示すことができる. 注意 1.2 より, $\lim_{s\to+0} f(s)/s = f_0 > \lambda_1$ であるから, 十分小さな $\delta > 0$ に対して,

$$f(s)/s > \lambda_1 \quad (0 < s < \delta).$$

$F^{-1}(0) = 0$ より, 十分小さな $\alpha_* > 0$ に対して

$$F^{-1}\left(\frac{e^H}{h_*}\alpha^2\right) < \delta \quad (0 < \alpha \leqq \alpha_*)$$

が成り立つ. 系 10.1 より, $0 < \alpha \leqq \alpha_*$ のとき,

$$0 < u(x,\alpha) < \delta \quad (0 < x < Z(\alpha)).$$

従って

$$h(x)\frac{f(u(x,\alpha))}{u(x,\alpha)} > \lambda_1 h(x) \quad (0 < x < Z(\alpha)).$$

スツルムの比較定理 (定理 11.2) より, $Z(\alpha) < 1$ $(0 < \alpha \leqq \alpha_*)$ を得る. □

14. 非線形項の挙動と零点の関係

補題 14.1. 条件 (F) の成立と $f_\infty \in (0,\infty]$ の存在を仮定する．そのとき，$f_\infty > \lambda_1$ ならば，ある $\alpha^* > 0$ に対して，$\alpha \geqq \alpha^*$ のとき $Z(\alpha) < 1$ である．

証明. λ を $f_\infty > \lambda > \lambda_1$ を満たすように一つとる．いま，

$$\lim_{s\to\infty} f(s)/s = f_\infty > \lambda$$

であるから，$M > 0$ を十分大きくとると，

$$f(s)/s > \lambda \quad (s \geqq M)$$

が成り立つ．補題 12.3 より，$(0,1)$ 内に 2 個の零点をもつ (12.1) の非自明解 v が存在する．そこで，$v(t_1) = v(t_2) = 0$, $0 < t_1 < t_2 < 1$ とする．α を十分大きくとると，(10.4) の $\delta > 0$ はいくらでも小さくなるので，$[t_1, t_2] \subset (\delta, 1-\delta)$ が成り立つ．$Z(\alpha) \geqq 1$ と仮定する．補題 10.1 より，

$$u(x,\alpha) \geqq M \quad (\delta \leqq x \leqq 1-\delta)$$

であるから，

$$h(x)\frac{f(u(x,\alpha))}{u(x,\alpha)} > \lambda h(x) \quad (0 < x < Z(\alpha)).$$

スツルムの比較定理より，(t_1, t_2) 内に $u(x,\alpha)$ は零点をもつことになるがこれは，$t_2 < 1-\delta < 1 \leqq Z(\alpha)$ に矛盾する．従って，$\alpha > 0$ が十分大きいとき，$Z(\alpha) < 1$ が成り立つ． □

補題 14.2. 条件 (F) の成立と $f_\infty \in [0,\infty)$ の存在を仮定する．そのとき，$f_\infty < \lambda_1$ ならば，ある $\alpha^* > 0$ に対して，$\alpha \geqq \alpha^*$ のとき $Z(\alpha) > 1$ である．

証明. λ を $f_\infty < \lambda < \lambda_1$ を満たすように一つとる．$M > 0$ を十分大きくとると，

$$\frac{f(s)}{s} < \lambda \quad (s \geqq M)$$

が成り立つ．補題 12.3 より，(12.1) の非自明解 v で $v(x) > 0$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ となるものが存在する．

$$V := \max\left\{\frac{|v'(x)|}{v(x)} : 0 \leqq x \leqq 1\right\}.$$

とおく．また，δ を (10.4) で定義する．十分大きな $\alpha^* > 0$ に対して，$\alpha \geqq \alpha^*$ ならば (10.3) と $\delta V \leqq 1$ が成り立つ．以下，$\alpha \geqq \alpha^*$ とする．$Z(\alpha) \leqq 1$ と仮定する．$T(\alpha) \in (0, Z(\alpha))$ を $u'(T(\alpha),\alpha) = 0$ を満たす点とする．$u = u(x,\alpha)$ とおく．そのとき，

$$\max_{0\leqq x\leqq Z(\alpha)} u(x) = u(T(\alpha))$$

である．補題 10.1 の (i) より，$u(T(\alpha)) > M$ であるから，$u(x_1) = u(x_2) = M$, $u(x) > M$ $(x_1 < x < x_2)$ を満たす x_1, $x_2 \in (0, Z(\alpha))$ が存在する．そのとき，$u'(x_1) > 0$, $u'(x_2) < 0$ であることに注意する．定理 10.1 より，

$$e^{-H}\alpha^2 \leqq E[u](x_j) \leqq [u'(x_j)]^2 + h^*F(M) \quad (j = 1,2)$$

であるから，

$$|u'(x_j)|^2 \geqq e^{-H}\alpha^2 - h^*F(M) = M^2\delta^{-2} \quad (j = 1,2).$$

$u(x_1) = u(x_2) = M$ と $\delta MV \leqq 1$ より

$$\frac{|u'(x_j)|}{u(x_j)} \geqq \frac{1}{\delta} \geqq V \quad (j = 1,2). \tag{14.1}$$

$u'(x_1) > 0$ であるから $u'(x_1)/u(x_1) \geqq V \geqq v'(x_1)/v(x_1)$. 即ち，

$$u'(x_1)v(x_1) - u(x_1)v'(x_1) \geqq 0. \tag{14.2}$$

$u(x) \geqq M$ $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$ であるから,

$$\int_{x_1}^{x_2} [u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]' dx = \int_{x_1}^{x_2} h(x) \left[\lambda - \frac{f(u(x))}{u(x)}\right] u(x)v(x)\, dx > 0.$$

従って,

$$\Big[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)\Big]_{x_1}^{x_2} > 0.$$

これと (14.2) より

$$u'(x_2)v(x_2) - u(x_2)v'(x_2) > u'(x_1)v(x_1) - u(x_1)v'(x_1) \geqq 0.$$

よって,

$$\frac{u'(x_2)}{u(x_2)} > \frac{v'(x_2)}{v(x_2)}$$

であるから

$$\frac{|u'(x_2)|}{u(x_2)} = \frac{-u'(x_2)}{u(x_2)} < \frac{-v'(x_2)}{v(x_2)} \leqq \frac{|v'(x_2)|}{v(x_2)} \leqq V.$$

これは (14.1) に矛盾である. 従って, $\alpha \geqq \alpha^*$ のとき $Z(\alpha) > 1$ である. □

補題 13.1, 14.1, 14.2 より次の存在定理を得る.

定理 14.1. 条件 (F) の成立と $f_\infty \in [0, \infty]$ の存在を仮定する.

(i) $f_\infty < \lambda_1 < f_0$ ならば (P) は解をもつ.
(ii) $f_0 < \lambda_1 < f_\infty$ ならば (P) は解をもつ.

15. 非自励系の問題の解の存在・非存在

系 13.1 と定理 14.1 より, 次の定理を得ることができる.

定理 15.1. 条件 (F) と $f_\infty \in [0, \infty]$ の存在を仮定する.

(I) (1.2) のとき

(i) $f_\infty < \lambda_1 < f_0$ ならば (P) は解をもつ.
(ii) $f_\infty \geqq \lambda_1$ または $\lambda_1 \geqq f_0$ ならば, (P) は解をもたない.

(II) (1.3) のとき

(i) $f_0 < \lambda_1 < f_\infty$ ならば (P) は解をもつ.
(ii) $f_0 \geqq \lambda_1$ または $\lambda_1 \geqq f_\infty$ ならば, (P) は解をもたない.

この結果より, (P) の解の存在・非存在は, (1.2) や (1.3) の場合, f_0, f_∞, λ_1 の関係で決定されることがわかる. 定理 8.1 と比較すると, 自励系の場合は解が存在した場合はその一意性まで得られているが, 非自励系の場合についての上の結果では解の一意性までは保証していない. これから先は, その解の一意性に関して議論していく.

16. 非自励系の問題の解の一意性: 劣線形の場合

第 9 節で述べたように, $x = Z(\alpha)$ は $u(Z(\alpha), \alpha) = 0$ の陰関数であり, 陰関数定理により, $Z \in C^1(0, \infty)$, かつ

$$Z'(\alpha) = -\frac{\frac{\partial u}{\partial \alpha}(Z(\alpha), \alpha)}{u'(Z(\alpha), \alpha)}$$

を満たす. 第 9 節のように系 2.1 から $u'(Z(\alpha), \alpha) < 0$ が導かれるので,

$$w(x, \alpha) := \frac{\partial u}{\partial \alpha}(x, \alpha)$$

とおくと, 次を得る.

命題 16.1. $w(Z(\alpha), \alpha) > 0$ ならば $Z'(\alpha) > 0$. $w(Z(\alpha), \alpha) < 0$ ならば $Z'(\alpha) < 0$.

また, 微分方程式の一般論より, $w(x,\alpha)$ は

$$(16.1)\qquad \begin{cases} w''+h(x)f'(u(x,\alpha))w=0, \\ \quad w(0)=0, \quad w'(0)=1, \end{cases}$$

の解であることが知られている. (問題 (16.1) は問題 (9.1) を α に関して (形式的に) 偏微分したものであることを注意しておく.)

補題 16.1. (F), (1.2) ならば $w(x,\alpha)>0$ $(0<x\leqq Z(\alpha))$.

証明. $w=w(x,\alpha)$ とおく. ある $c\in(0,Z(\alpha)]$ に対して $w(c)=0$ と仮定する. $w'(0)=1$ より $(0,c)$ において $w(x)>0$ としてもよい. よって, (16.1) により

$$w''+h(x)f'(u(x,\alpha))w=0, \quad w(0)=w(c)=0.$$

注意 1.1 より, $s>0$ のとき $f'(s)<f(s)/s$ が成立する. 従って,

$$h(x)f'(u(x,\alpha))<h(x)\frac{f(u(x,\alpha))}{u(x,\alpha)} \quad (0<x<Z(\alpha)).$$

また, $u(x,\alpha)$ は

$$u''+h(x)\frac{f(u(x,\alpha))}{u(x,\alpha)}u=0, \quad u(0)=u(Z(\alpha))=0,$$

の解である. スツルムの比較定理 (定理 11.2) より, $c>Z(\alpha)$. これは $c\leqq Z(\alpha)$ に矛盾である. □

補題 16.1 より $w(Z(\alpha),\alpha)>0$. 従って, 命題 16.1 より次を得る.

補題 16.2. (F), (1.2) ならば $\alpha>0$ に対して $Z'(\alpha)>0$ が成立する.

この補題 16.2 により, 次が成立する.

定理 16.1. (F), (1.2) のとき, (P) の解は存在すればただ一つである.

本節のように初期値問題 (9.1) の解 $u(x,\alpha)$ の零点 $Z(\alpha)$ の増減を線形化問題 (16.1) の解 $w(x,\alpha)$ の零点の個数により調べ, 境界値問題 (P) の解の厳密な個数を求める方法を **Kolodner-Coffman の方法**という. この方法は Kolodner [6] が最初に用いたもので, その後, Coffman が [4], [5] など様々な問題に適用し, 解の一意性に関するいくつかの重要な結果を導いた. 現在では多くの研究者が Kolodner-Coffman の方法を使って, 諸問題の解の厳密な個数を調べており, この非常に素朴な方法は, 境界値問題の解の厳密な個数を知るための最も有用な方法の一つとなっている.

17. 非自励系の問題の解の一意性: 優線形の場合

優線形の場合は劣線形のときのように任意の $h(x)$ に対して解が一意であるわけではなく, $h(x)$ に対してなんらかの条件が必要となる. そのことをこの節と次の節で述べる. この節では, Kolodner-Coffman の方法により, 次の結果を示す.

定理 17.1. 条件 (F), (1.3) と次の条件 (17.1), (17.2) を仮定する.

$$(17.1)\qquad 2h(x)+xh'(x)\geqq 0 \quad (0\leqq x\leqq 1),$$

$$(17.2)\qquad 2h(x)-(1-x)h'(x)\geqq 0 \quad (0\leqq x\leqq 1).$$

そのとき (P) の解は存在すればただ一つである.

注意 17.1. 定理 17.1 において, 条件 (17.1), (17.2) を完全に消すことはできない. (次節参照.)

以下, この節では $u=u(x,\alpha)$, $w=w(x,\alpha)$ とおく.

補題 17.1. 任意の $g \in C^2[0,1]$ に対して, 次が成り立つ.

$$\left[gw'u' + gwhf(u) - g'wu'\right]' = -g''wu' + (2g'h + gh')f(u)w. \tag{17.3}$$

証明. 計算すれば (17.3) を得ることができる. □

$T(\alpha) \in (0, Z(\alpha))$ を $u'(T(\alpha), \alpha) = 0$ を満たす点とする.

補題 17.2. 条件 (F), (17.1) が成り立つならば, 区間 $(0, T(\alpha)]$ 上 $w(x,\alpha) > 0$ である.

証明. ある $c \in (0, T(\alpha)]$ に対して $w(c) = 0$ と仮定する. $w'(0) = 1$ より, 区間 $(0, c)$ 上 $w(x) > 0$ としてよい. そのとき $w'(c) < 0$ である. また $u'(c) \geqq 0$ に注意する. 恒等式 (17.3) で $g(x) = x$ とおくと

$$\left[xw'u' + xwhf(u) - wu'\right]' = (2h + xh')f(u)w.$$

これを区間 $[0, c]$ 上積分すると

$$cw'(c)u'(c) = \int_0^c \left(2h(x) + xh'(x)\right)f(u(x))w(x)dx. \tag{17.4}$$

$2h(x) + xh'(x)$ は $x = 0$ のとき正であるので, ある $\delta > 0$ に対して

$$2h(x) + xh'(x) > 0 \quad (0 \leqq x < \delta).$$

従って (17.1), (17.4) より, $cw'(c)u'(c) > 0$. しかし, これは $w'(c) < 0$, $u'(c) \geqq 0$ に矛盾. 以上より, 区間 $(0, T(\alpha)]$ 上 $w(x,\alpha) > 0$ である. □

補題 17.3. 条件 (F), (1.3) を仮定する. そのとき, $w(x,\alpha)$ は区間 $(0, Z(\alpha))$ 内に零点をもつ.

証明. 注意 1.1 より, $s > 0$ に対して $f'(s) > f(s)/s$ が成り立つ. 従って,

$$h(x)f'(u(x)) > h(x)\frac{f(u(x))}{u(x)} \quad (0 < x < Z(\alpha)).$$

スツルムの比較定理 (定理 11.2) より w は区間 $(0, Z(\alpha))$ 内に零点をもつ. □

$w(x,\alpha)$ の区間 $(0,\infty)$ 内の最小の零点を $R(\alpha)$ とおく.

補題 17.4. $T(\alpha) < R(\alpha) < Z(\alpha) = 1$ とする. さらに条件 (F), (17.2) を仮定する. そのとき $w(x,\alpha) < 0$ $(R(\alpha) < x \leqq Z(\alpha))$ が成り立つ.

証明. ある $c \in (R(\alpha), Z(\alpha)]$ に対して $w(c) = 0$ かつ区間 $(R(\alpha), c)$ において $w(x) < 0$ と仮定する. 恒等式 (17.3) で $g(x) = 1 - x$ とおくと

$$\left[(1-x)w'u' + (1-x)whf(u) + wu'\right]' = \left[-2h(x) + (1-x)h'(x)\right]f(u)w \geqq 0.$$

これを $[R(\alpha), c]$ 上積分すると

$$(1-c)w'(c)u'(c) - (1 - R(\alpha))w'(R(\alpha))u'(R(\alpha)) \geqq 0.$$

しかし, これは $w'(c) > 0$, $u'(c) < 0$ に矛盾する. 従って, $R(\alpha) < x \leqq Z(\alpha)$ に対して $w(x,\alpha) < 0$ が成り立つ. □

定理 17.1 の証明. 最初に $Z(\alpha) = 1$ のとき $Z'(\alpha) < 0$ に注意する. 実際 $Z(\alpha) = 1$ ならば, 補題 17.2–17.4 より $w(Z(\alpha), \alpha) < 0$ であり, 命題 16.1 より $Z'(\alpha) < 0$ となる.

もし, (P) がすくなくとも 2 個の解をもつと仮定すると次の α_1, α_2 が存在する.

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2, \quad Z(\alpha_1) = Z(\alpha_2) = 1.$$

従って, $Z'(\alpha_1) < 0$, $Z'(\alpha_2) < 0$ が成り立つ. 中間値の定理より $Z(\alpha_0) = 1$ かつ $Z'(\alpha_0) \geqq 0$ を満たす $\alpha_0 \in (\alpha_1, \alpha_2)$ が存在する. これは矛盾. よって (P) の解は存在すればただ一つである. □

18. 非自励系の問題の解の非一意性: 優線形の場合

この節では次の問題

$$
\text{(18.1)}\qquad \begin{cases} u'' + |x|^l u^p = 0 \quad (-1 < x < 1), \\ u(-1) = u(1) = 0, \\ u(x) > 0 \quad (-1 < x < 1) \end{cases}
$$

を考える. ここで $l > 0$, $p > 1$ とする.

定理 18.1. $l(p-1) > 4$ のとき, 問題 (18.1) はすくなくとも 3 個の解をもつ.

φ を次の解とする.

$$
\text{(18.2)}\qquad \begin{cases} \varphi'' + |x|^l \varphi^p = 0, \\ \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0. \end{cases}
$$

補題 3.1 と同様の方法で次を示すことができる.

補題 18.1. φ は $(0, \infty)$ に零点をもつ.

補題 18.2. φ は 偶関数である.

証明. $\psi(x) = \varphi(-x)$ とおく. ψ も (18.2) の解である. 初期値問題の解の一意性により, $\varphi(x) \equiv \psi(x)$. 従って, φ は 偶関数である. □

補題 18.3. 問題 (18.1) は偶関数解をもつ.

証明. 区間 $(0, \infty)$ における φ の最小の零点を z とおく. 補題 18.1 より, そのような z は存在する. 補題 18.2 より φ は 偶関数であるので,

$$
\varphi(x) > 0 \ \ (x \in (-z, z)), \quad \varphi(-z) = \varphi(z) = 0
$$

が成り立つ. $u(x) = z^{(l+2)/(p-1)}\varphi(zx)$ とおくと u は問題 (18.1) の偶関数解である. □

以前と同様に $u(x, \alpha)$ を

$$
\begin{cases} u'' + |x|^l u^p = 0, \\ u(-1) = 0, \quad u'(-1) = \alpha > 0 \end{cases}
$$

の解とする. また, $Z(\alpha)$ を $u(x, \alpha)$ の区間 $(-1, \infty)$ における最小の零点とする.

補題 14.1, 14.2 と同様の方法で次を示すことができる.

補題 18.4. 次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) $\alpha > 0$ が十分小さいとき, $Z(\alpha) > 1$,

(ii) $\alpha > 0$ が十分大きいとき, $Z(\alpha) < 1$.

$w(x, \alpha)$ を

$$
\begin{cases} w'' + p|x|^l [u(x, \alpha)]^{p-1} w = 0, \\ w(-1) = 0, \quad w'(-1) = 1 \end{cases}
$$

の解とする.

命題 16.1 と同様に次を得ることができる.

補題 18.5. $w(Z(\alpha), \alpha) > 0$ ならば $Z'(\alpha) > 0$. $w(Z(\alpha), \alpha) < 0$ ならば $Z'(\alpha) < 0$.

補題 18.3 より, ある $\alpha_1 > 0$ に対して $u(x, \alpha_1)$ は (18.1) の偶関数解である. そのとき $Z(\alpha_1) = 1$ である.

以下, $u_1 = u(x, \alpha_1)$, $w_1 = w(x, \alpha_1)$ とおく. そのとき, w_1 は

$$
w_1'' + p|x|^l u_1^{p-1} w_1 = 0
$$

を満たす.

補題 18.6. w_1 の区間 $(-1,1]$ 内の零点は 2 個以下である.

証明.
$$c=\frac{l+2}{p-1},\quad y(x)=cu_1(x)+xu_1'(x)$$
とおく. そのとき, y は
$$y''+p|x|^l u_1^{p-1}y=0$$
の解である. さらに,
$$y(0)=cu_1(0)>0,\quad y(\pm 1)=\pm u'(\pm 1)<0,$$
$$y'(x)>0\ \ (x\in[-1,0)),\quad y'(x)<0\ \ (x\in(0,1])$$
が成り立つので, y は区間 $(-1,1)$ 内にちょうど二つの零点をもつ.

もし, w_1 が $(-1,1]$ 内に 3 個以上の零点をもつと仮定すると, $w_1(-1)=0$ であるので, 定理 11.3 より, y は $(-1,1]$ 内にすくなくとも 3 個の零点をもつことになり, 矛盾する.

よって, w_1 の区間 $(-1,1]$ 内の零点は 2 個以下である. □

補題 18.7. $l(p-1)>4$ のとき, w_1 は区間 $(0,1)$ 内にすくなくとも 1 個の零点をもつ.

証明. $y(x)=xu_1(x)-(1-x)^2u_1'(x)$ とおく. そのとき y は
$$y''+p|x|^l u_1^{p-1}y=|x|^l x^{-1}r(x)u_1^p\quad (x\in(0,1])$$
を満たす. ここで
$$\begin{aligned}r(x)&=(p+l+3)x^2-2(l+2)x+l\\&=(p+l+3)\left(x-\frac{l+2}{p+l+3}\right)^2+\frac{l(p-1)-4}{p+l+3}>0\end{aligned}$$
である. このとき
$$(y'w_1-yw_1')'=|x|^l x^{-1}r(x)u_1^p w_1$$
が成り立つので, これを $[0,1]$ 上積分すると, $y(0)=y(1)=0$ より,
$$y'(1)w_1(1)-y'(0)w_1(0)=\int_0^1|x|^l x^{-1}r(x)u_1^p w_1dx \tag{18.3}$$
を得る. 区間 $(0,\infty)$ で $w_1(x)>0$ のとき, (18.3) の左辺は非正であるが, 右辺は正であるので矛盾. 同様に $(0,\infty)$ で $w_1(x)<0$ のときも矛盾である. 従って, w_1 は区間 $(0,1)$ 内にすくなくとも 1 個の零点をもつ. □

補題 18.8. $l(p-1)>4$ のとき, w_1 は区間 $(-1,0)$ 内にすくなくとも 1 個の零点をもつ.

証明. y を補題 18.7 のものとする. $v(x)=y(-x)$ とおくと, v は
$$v''+p|x|^l u_1^{p-1}v=|x|^l x^{-1}r(-x)u_1^p,\quad v(0)=v(-1)=0$$
を満たす. このとき
$$(v'w_1-vw_1')'=|x|^l x^{-1}r(-x)u_1^p w_1$$
が成り立つので, これを $[-1,0]$ 上積分すると
$$v'(0)w_1(0)=\int_{-1}^0|x|^l x^{-1}r(-x)u_1^p w_1dx$$
を得る. 補題 18.7 の証明と同様の議論により, w_1 は区間 $(-1,0)$ 内にすくなくとも 1 個の零点をもつ. □

定理 18.1 の証明. 補題 18.6, 18.7, 18.8 より w_1 は区間 $(-1, 1)$ でちょうど 2 個の零点をもち, $w_1(1) > 0$ である. よって,

$$w_1(1) = w(1, \alpha_1) = w(Z(\alpha_1), \alpha_1) > 0.$$

従って, 補題 18.5 より, $Z'(\alpha_1) > 0$. 補題 18.4 より, 次を満たす α_0, α_2 が存在する.

$$0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2, \quad Z(\alpha_0) = Z(\alpha_2) = 1$$

以上より, $u(x, \alpha_0)$, $u(x, \alpha_1)$, $u(x, \alpha_2)$ は (18.1) の解である. □

参考文献

[1] 草野尚, 境界値問題入門 (基礎数学シリーズ), 朝倉書店, 2005 (復刊版).

[2] 柳田英二・栄伸一郎, 常微分方程式論, 朝倉書店, 2002.

[3] 吉沢太郎, 微分方程式入門 (基礎数学シリーズ), 朝倉書店, 2005 (復刊版).

[4] C. V. Coffman, On the positive solutions of boundary-value problems for a class of nonlinear differential equations, *J. Differential Equations* **3** (1967), 92–111.

[5] C. V. Coffman, Uniqueness of the ground state solution for $\Delta u - u + u^3 = 0$ and a variational characterization of other solutions, *Arch. Rational Mech. Anal.* **46** (1972), 81–95.

[6] I. I. Kolodner, Heavy rotating string–a nonlinear eigenvalue problem, *Comm. Pure Appl. Math.* **8** (1955), 395–408.

[7] M. K. Kwong, On the Kolodner-Coffman method for the uniqueness problem of Emden-Fowler BVP, *Z. Angew. Math. Phys.* **41** (1990), 79–104.

[8] Y. Naito and S. Tanaka, On the existence of multiple solutions of the boundary value problem for nonlinear second-order differential equations. *Nonlinear Anal.* **56** (2004), 919–935.

[9] R. S. Palais, A simple proof of the Banach contraction principle, *J. Fixed Point Theory Appl.* **2** (2007), 221–223.

[10] R. Schaaf, *Global solution branches of two-point boundary value problems.* Lecture Notes in Mathematics, **1458**, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[11] S. Tanaka, An identity for a quasilinear ODE and its applications to the uniqueness of solutions of BVP, *J. Math. Anal. Appl.* **351** (2009), 206–217.

[12] S. Tanaka, Morse index and symmetry-breaking for positive solutions of one-dimensional Hénon type equations, *J. Differential Equations* **255** (2013), 1709–1733.

所々で微分方程式の一般論を用いたが, それは, 例えば [3] などを参照してほしい. 第 11 節のスツルムの比較定理や第 12 節の固有値問題などの線形の境界値問題に関しては [1] や [2] が詳しい. 第 5–8 節の非自励系の問題に関しては, [10] で様々な非線形項について述べられている. 定理 15.1 のここでの証明方法は [8] の方法である. 定理 17.1 は Kwong [7] の結果であるが, ここで紹介した証明方法は [11] によるものである. 定理 18.1 は, より一般的な形で [12] で得られている.

謝辞

田中視英子先生 (東京理科大学) と先生が指導されている学生さんと, 塩路直樹先生 (横浜国立大学) は拙稿を熟読して多くの有益な助言を与えて下さいました. その皆様のご支援に心から感謝致します.

付録: 定理 2.1, 定理 11.1 の証明

補題 A.1. $f \in C(\mathbf{R})$, $h \in C[a,b]$, $I \subset [a,b]$, $x_0 \in I$ とする. u が初期値問題 (2.2) の I 上の解であることと, u が I 上で

$$u(x) = \alpha + \beta(x - x_0) - \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{t} h(s) f(u(s)) ds dt \tag{A.4}$$

を満たすことは同値である.

証明. u を I 上の (2.2) の解とする. (2.2) の微分方程式を $[x_0, t]$ 上積分し, それをさらに, $[x_0, x]$ 上積分すると, (2.2) の初期条件より, (A.4) を得る.

逆に, u は I 上で (A.4) を満たすと仮定する. (A.4) の両辺を微分することにより, u は (2.2) の I 上の解であることがわかる. □

定理 10.1 の証明と同様の方法で次を示すことができる.

補題 A.2. $f \in C^1(\mathbf{R})$, $sf(s) > 0$ $(s \neq 0)$, $h \in C^1[a,b]$, $h(x) > 0$ $(a \leqq x \leqq b)$ を仮定する. α, β を定数, $x_0 \in [a,b]$ とする. u がある区間 I $(x_0 \in I)$ 上の (2.2) の解ならば, ある定数 $M = M(x_0, \alpha, \beta, a, b, h) > 0$ に対して, u は

$$|u(x)| \leqq M \quad (x \in I)$$

を満たす.

定理 A.1 (縮小写像の原理)**.** $(X, ||\cdot||)$ をバナッハ空間とする. *$T:\ X \to X$ が縮小写像, すなわち, ある定数 c $(0 < c < 1)$ に対して*

$$\|Tu - Tv\| \leqq c\|u - v\| \quad (u, v \in X)$$

を満たすならば, $Tu = u$ を満たす $u \in X$ が存在して, 一意である.

証明. この証明は Palais [9] によるものである. まず,

$$\begin{aligned} ||u - v|| &= ||(u - Tu) + (Tu - Tv) + (Tv - v)|| \\ &\leqq ||u - Tu|| + ||Tu - Tv|| + ||Tv - v|| \\ &\leqq ||u - Tu|| + c||u - v|| + ||Tv - v||, \end{aligned}$$

であるから,

$$(1 - c)||u - v|| \leqq ||u - Tu|| + ||Tv - v||,$$

即ち,

$$||u - v|| \leqq \frac{1}{1 - c}(||Tu - u|| + ||Tv - v||) \tag{A.5}$$

が成り立つ. この (A.5) より, もし, $Tu = u$, $Tv = v$, u, $v \in X$ ならば, $||u - v|| = 0$ が成り立つので, $u = v$ を得る. 従って, $Tu = u$ を満たす $u \in X$ は存在すれば一意である.

次に $Tu = u$ を満たす $u \in X$ が存在することを示す. いま, $u_0 \in X$ を1つとり,

$$u_i = Tu_{i-1} \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

とおく. そのとき,

$$\|u_{i+1} - u_i\| = \|Tu_i - Tu_{i-1}\| \leqq c\|u_i - u_{i-1}\|$$

である. これをくり返し使うと

$$\|u_{i+1} - u_i\| \leqq c\|u_i - u_{i-1}\| \leqq c^2\|u_{i-1} - u_{i-2}\| \leqq \cdots \leqq c^i\|u_1 - u_0\|$$

を得る. 従って, (A.5) より

$$\begin{aligned}\|u_i - u_j\| &\leqq \frac{1}{1-c}(||Tu_i - u_i|| + ||Tu_j - u_j||) \\ &= \frac{1}{1-c}(||u_{i+1} - u_i|| + ||u_{j+1} - u_j||) \\ &= \frac{c^i + c^j}{1-c}||u_1 - u_0||\end{aligned}$$

が成り立つので, $\{u_i\}$ はコーシー列である. 従って, u_i の極限 $u \in X$ が存在する. この u が $Tu = u$ を満たす. * 実際,

$$\begin{aligned}\|Tu - u\| &= \|(Tu - Tu_i) + (Tu_i - u)\| \\ &\leqq \|Tu - Tu_i\| + \|Tu_i - u\| \\ &\leqq c\|u - u_i\| + \|u_{i+1} - u\|\end{aligned}$$

であるので, この不等式で $i \to \infty$ とすると $\|Tu - u\| = 0$, 即ち, $Tu = u$ を得る. □

定理 2.1 の証明. 定数 $M > 0$ を補題 A.2 のものとする. $K = 2M + |\alpha|$ とおく. 平均値の定理より, $s, t \in [-K, K]$, $s \neq t$ のとき,

$$\frac{f(s) - f(t)}{s - t} = f'(c)$$

を満たす $c \in (-K, K)$ が存在する. $L = \max_{s \in [-K,K]} |f'(s)|$ とおけば, $|f(s) - f(t)| = |f'(c)||s - t|$ より

$$|f(s) - f(t)| \leqq L|s - t| \quad (s,\ t \in [-K, K])$$

が成り立つ. 関数 $\overline{f}$ を次で定義する:

$$\overline{f}(s) = \begin{cases} f(-K) & (s < -K), \\ f(s) & (|s| \leqq K), \\ f(K) & (s > K). \end{cases}$$

そのとき, $\overline{f}$ は

$$|\overline{f}(s) - \overline{f}(t)| \leqq L|s - t| \quad (s,\ t \in \mathbf{R})$$

を満たす. さらに

$$h^* = \max_{a \leqq x \leqq b} |h(x)| > 0, \quad A = h^* L(b - a), \quad \|u\| = \max_{a \leqq x \leqq b} e^{-2Ax}|u(x)|$$

とおく. この $||\cdot||$ に関して $C[a, b]$ はバナッハ空間である. いま,

$$(Tu)(x) = \alpha + \beta(x - x_0) - \int_{x_0}^{x} (x - s)h(s)\overline{f}(u(s))ds$$

---

*実は, $Tu = u$ の証明は T が縮小写像であることから, T は連続であることがわかるので, $Tu_i = u_{i+1}$ で $i \to \infty$ とすれば直ちに得られる. ここでは T の連続性を使わずに証明した.

と定義すると, T: $C[a,b] \to C[a,b]$ である．任意の $u, v \in C[a,b]$ に対して, $a \leqq x \leqq b$ のとき,

$$\begin{aligned}
|(Tu)(x) - (Tv)(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{t} h(s)[f(u(s)) - f(v(s))] ds dt \right| \\
&\leqq \int_{a}^{x} \int_{a}^{t} |f(u(s)) - f(v(s))| ds dt \\
&\leqq h^* L \int_{a}^{x} \int_{a}^{x} |u(s) - v(s)| ds dt \\
&= A \int_{a}^{x} e^{2As} e^{-2As} |u(s) - v(s)| ds \\
&\leqq A ||u - v|| \int_{a}^{x} e^{2As} ds \\
&= \frac{1}{2} ||u - v|| (e^{2Ax} - e^{2Aa}) \\
&\leqq \frac{1}{2} ||u - v|| e^{2Ax}
\end{aligned}$$

であるから,

$$e^{-2Ax} |(Tu)(x) - (Tv)(x)| \leqq \frac{1}{2} ||u - v||$$

が成り立つ．この両辺で区間 $[a,b]$ 上の最大値をとると,

$$||Tu - Tv|| \leqq \frac{1}{2} ||u - v||$$

を得るので, T は縮小写像である．従って, 定理 A.1 より, ある $u \in C[a,b]$ に対して, $Tu = u$ であり, しかもこのような $u \in C[a,b]$ は一意である．以下, u をそのようなものとする．そのとき,

$$|u(x_0)| \leqq |\alpha| < K$$

であるから, ある区間 J ($J \in x_0$) に対して,

$$|u(x)| < K \quad (x \in J)$$

である．いま,

$$|u(x)| < K \quad (x \in [a,b]) \tag{A.6}$$

を示す．そうでないと仮定すると, ある $x_1 \in [a,b]$ ($x_1 \neq x_0$) に対して

$$|u(x_1)| = K, \quad |u(x)| \leqq K \ (x \in I)$$

が成り立つ．ここで, $x_0 < x_1$ のとき $I = [x_0, x_1]$, $x_1 < x_0$ のとき $I = [x_1, x_0]$ とする．そのとき, $\overline{f}(u(x)) = f(u(x))$ ($x \in I$) であるから, $Tu = u$ より, u は I で (A.4) を満たす．補題 A.1 より, u は I 上の (2.2) の解である．補題 A.2 より,

$$|u(x)| \leqq M < K \quad (x \in I)$$

であるから, $|u(x_1)| < K$ を得るが, これは $|u(x_1)| = K$ に矛盾する．従って, (A.6) が成り立つ．よって, $\overline{f}(u(x)) = f(u(x))$ ($x \in [a,b]$) であるから, 補題 A.1 より, u は $[a,b]$ 上の (2.2) の解である．

　もし, v が $[a,b]$ 上の (2.2) の解とすると, 補題 A.1, 補題 A.2 より, v は $Tv = v$ を満たすので, 定理 A.1 により, $u = v$ を得る．従って, $[a,b]$ 上の (2.2) の解は一意である．　□

定理 11.1 の証明. v をある区間 I ($x_0 \in I$) 上の (11.1) の解とする．$V = v^2 + (v')^2$, $q^* = \max_{a \leqq x \leqq b} |q(x)|$ とおくと,

$$|V'| = |2v'v(1 - q(x))| \leqq 2|v||v'|(1 + |q(x)|) \leqq (1 + q^*)V, \quad x \in I$$

を得る. 従って,

$$(e^{-(1+q^*)(x-x_0)}V)' \leqq 0, \quad (e^{(1+q^*)(x-x_0)}V)' \geqq 0, \quad (x \in I)$$

が成り立つ. $(e^{-(1+q^*)(x-x_0)}V)' \leqq 0$ $(x \in I)$ より, $x \geqq x_0$ かつ $x \in I$ のとき,

$$e^{-(1+q^*)(x-x_0)}V(x) \leqq e^{-(1+q^*)(x_0-x_0)}V(x_0) = \alpha^2 + \beta^2$$

であるから,

$$V(x) \leqq (\alpha^2 + \beta^2)e^{(1+q^*)(x-x_0)} \leqq (\alpha^2 + \beta^2)e^{(1+q^*)(x_2-x_1)} \tag{A.7}$$

同様に, $(e^{(1+q^*)(x-x_0)}V)' \geqq 0$ $(x \in I)$ より, $x \leqq x_0$ かつ $x \in I$ のときも (A.7) を示すことができる. 従って, 初期値問題 (11.1) についても, 補題 A.2 と同じことが成り立つ. よって, 上述の定理 2.1 の証明と同じ方法で定理 11.1 を証明することができる. □