集中講義

池田岳 先生

期間　2018年11月26日 〜 30日
題目　数え上げ幾何学

— シューベルト多様体の特異点の重複度について —

名古屋大学にて.

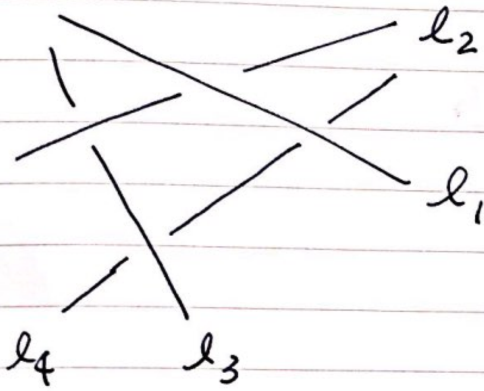
1日目	§.0	数え上げ幾何学
	§.1.	グラスマン多様体
2,3日目	§.2.	交叉理論
	§.3.	Schur関数(多項式)
4日目	§.4.	T-同変コホモロジー
5日目	§.5.	重複度

11月26日

552

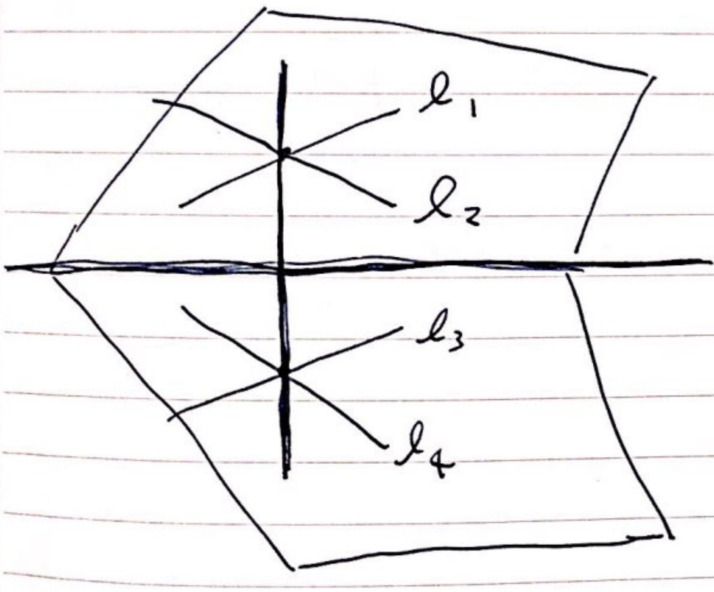
数え上げ幾何学
(Schubert calculus)

直線 l_1, l_2, l_3, l_4 : $\mathbb{C}^3 \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$
が与えられたとする.



$\#\{l \cap l_i \neq \emptyset \ (1 \leq i \leq 4)\}$

l: 直線



やや特殊.

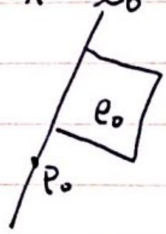
"一般"

個数保存の原理

Gerade

[illegible] Schubert 条件 $\mathbb{P}^3$

旗 ℓ_0



1 ℓ 任意 ϕ

$\cup$ ← fix

g $\ell \cap \ell_0 \neq \phi$

punkt $\cup$ □ $\cup$ fixed 平面

$p_0 \in \ell$ $\ell \subset e_0$

g_p ⊞ $\cup$ $\cup$ 日 g_e

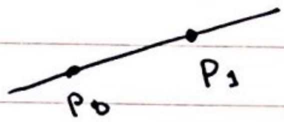
$p_0 \in \ell \subset e_0$ g_s

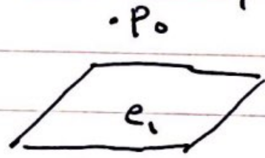
Strahl $\cup$ 田

$\ell = \ell_0$

田 G

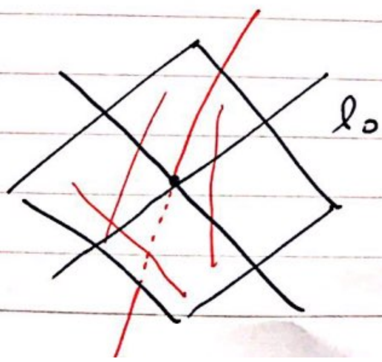
$g_p^2 = G$. $p_0 \in \ell$, $p_1 \in \ell$ $g_p \cdot g_e = 0$ $p_0 \in \ell$, $\ell \subset e_1$





$g_e^2 = G$

$g^2 = g_e + g_p$ $\ell_0 \cap \ell \neq \phi$, $\ell_1 \cap \ell \neq \phi$



やや誇張.

$$g^4 = g^2 \cdot g^2 = (g_e + g_p)^2 = g_e^2 + 2 \cdot g_e \cdot g_p + g_p^2$$
$$= G + 2 \cdot 0 + G$$
$$= 2G.$$

$$\{\text{lines in } \mathbb{P}^3\} \cong Gr(2, \mathbb{C}^4) = X$$

2次元線型部分空間
Grassmannian

Xの部分多様体

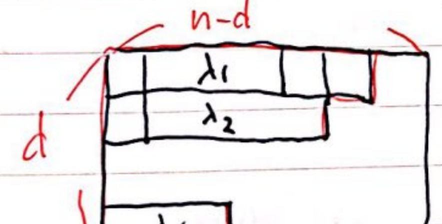
$$X = \Omega_1, \Omega_g, \Omega_{g_e}, \Omega_{g_p}, \Omega_{g_s}, \Omega_G = pt$$

Schubert多様体.

一般に $X = Gr(d, \mathbb{C}^n)$

$$= \coprod_\lambda O_\lambda$$ セル分割

$Y_d(n)$ $\lambda : (n-d) \geqq \lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_d \geqq 0 \quad (\lambda_i \in \mathbb{Z})$.



Young図形

$$O_\lambda \cong \mathbb{C}^{d(n-d)-|\lambda|}$$

$$|\lambda| = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i$$

Schubert多様体

$$\Omega_\lambda = \coprod_{\mu \supset \lambda} O_\mu \leftarrow O_\lambda \text{の閉包}$$

環

$$H^*(Gr(d, \mathbb{C}^n)) = \bigoplus_{\lambda \in Y_d(n)} \mathbb{Z}[\Omega_\lambda]$$

$$\uparrow$$

$$\sigma_\lambda$$

Schubert類

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = \sum_{|\nu| = |\lambda| + |\mu|} c^\nu_{\lambda\mu} \sigma_\nu$$

$c^\nu_{\lambda\mu}$ が計算できれば数え上げの問題が解ける.

① 定理　全射環準同型

$$\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_d]^{S_d} \xrightarrow[\pi_n]{} H^*(Gr(d, \mathbb{C}^n))$$

"Schur関数"

$$S_\lambda(z_1, \dots, z_d) \longmapsto \begin{cases} \sigma_\lambda & (\lambda \in Y_d(n)) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$\lambda \in Y_d = \bigcup_{n \geq d} Y_d(n)$$

$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d \geq 0$$

定理を用いると $C^{\nu}_{\lambda\mu}$ の良い表示が
得られる。　組合せ論的なモノ
(semistandard tableaux) の個数

(注) $GL_d(\mathbb{C})$ の既約表現のテンソル積表現

$C^{\nu}_{\lambda\mu}$: Littlewood - Richardson

② トーラス同変コホモロジー

$$T = (\mathbb{C}^\times)^n \underset{\text{対角行列}}{\subset} GL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}^n$$

$$H^*_T(Gr(d, \mathbb{C}^n))$$

一般に G (位相群) $\xrightarrow{\text{作用}}$ X : 位相空間

$G \curvearrowright EG$ 可縮
fix

$BG = EG/G$　分類空間

例　$G = \mathbb{C}^\times$, $BG = \mathbb{P}^\infty$

$X_G = EG \times X / G$　Borel の構成

$H^*_G(X) := H^*(X_G) \leftarrow H^*_G(pt)$ alg.　　$X \to pt$

G-同変コホモロジー　　$T = (\mathbb{C}^\times)^n$

$H^*_{\mathbb{C}^\times}(pt) = H^*(BT) = \mathbb{Z}[T]$

$H_T^*(pt) = \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$

$H_T^*(Gr(d, \mathbb{C}^n))$ は $H_T^*(pt)$ 上自由.

Ω_λ は T-stable $\rightsquigarrow \sigma_\lambda^T$ $\quad \{\sigma_\lambda^T\}_{\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)}$ $H_T^*(pt)$ 上の基底

X^T : T- 固定点の集合

$X = Gr(d, \mathbb{C}^n)$ のとき

$X^T = \{ e_\mu \mid \mu \in \mathcal{Y}_d(n) \}$

$$i : X^T \hookrightarrow X \rightsquigarrow \underbrace{H_T^*(X)}_{\sigma_\lambda^T} \xhookrightarrow{i^*} H_T^*(X^T) = \prod_{\mu \in \mathcal{Y}_d(n)} H_T^*(e_\mu)$$

$\sigma_\lambda^T|_{e_\mu} \in \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$

$z = (z_1, \dots, z_d)$

$t = (t_1, \dots, t_n)$

$$\begin{array}{ccc}
 & & \prod_{\mu \in \mathcal{Y}_d(n)} \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] = H_T^*(Gr(d, \mathbb{C}^n)) \\
 & \overset{(f_\mu(t))_\mu}{\underset{z = t_\mu}{\nearrow \text{代入}}} & \cup \\
H_T^*(pt)[z_1, \dots, z_d]^{S_d} & \xrightarrow[\pi_n]{} & H_T^*(Gr(d, \mathbb{C}^n)) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \\
f(z, t) & &
\end{array}$$

応用 $\quad e_\mu \in \Omega_\lambda$

特異性

Hilbert-Samuel multiplicity

$$\begin{array}{ccccc}
s_\lambda(z|t) & \longmapsto & s_\lambda(t_\mu|t) & \longmapsto & \operatorname{mult}_{e_\mu} \Omega_\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
 & & \text{w/ Naruse} & & \uparrow \\
\sigma_\lambda^T & & \sigma_\lambda^T|_{e_\mu} & &
\end{array}$$

行列式表示, 組合せ論的表す.

K : Grothendieck

double (factrial)

K_T - Grothendieck

§1. グラスマン多様体

$d=1,\dots,n>d$

$X = Gr(d,\mathbb{C}^n) = \{ V \mid V$ は d 次元線型部分空間 $\subset \mathbb{C}^n \}$

$d=1$ のときは. $\mathbb{P}^{n-1}$ 射影空間

$G = GL_n(\mathbb{C})$ が $\mathbb{C}^n$ に作用

$\{e_i\}_{i=1}^{n}$ $\mathbb{C}^n$ の標準基底　　X にも自然に作用 (推移的)

$\langle e_1,\dots,e_d\rangle \in X$

$$P = \left\{ \begin{array}{c|cc} & d & n-d \\ d & * & * \\ n-d & 0 & * \end{array} \right\} \subset G$$

$X = G/P$ と見なせる. (X は射影多様体)

X の点　$g\in G$ によって　　　gの列ベクトル $1\sim d$ 列

$g\langle e_1,\dots,e_d\rangle = \langle ge_1,\dots,ge_n\rangle = \langle v_1,\dots,v_d\rangle$

$$V_d(\mathbb{C}^n) = \overset{\text{rank } n}{M^{\circ}_{n,d}}(\mathbb{C}) = \left\{ (v_1,\dots,v_d) \;\middle|\; \begin{array}{l} v_i\in\mathbb{C}^n \\ v_1,\dots,v_d \text{ 1次独立} \end{array} \right\}$$

とおくと

$Gr(d,\mathbb{C}^n) = V_d(\mathbb{C}^n)/GL_d(\mathbb{C})$

基底変換

$$\begin{array}{c|c|} & d \\ n & v_1,\dots,v_d \\ & \end{array}$$

$(v_1,\dots,v_d) \sim (v_1',\dots,v_d')$

$$\Leftrightarrow (v_1',\dots,v_d') = (v_1,\dots,v_d)P$$

$$P \in GL_d(\mathbb{C})$$

$$V_d(\mathbb{C}^n) \supset \left\{ \begin{array}{c|c} & d \\ d & \\ n-d & \end{array}\!\!\!\! \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \\ \hline * \end{pmatrix} \right\} = \underset{\text{とおく}}{U_\phi} = U_{\{1,\dots,d\}} \cong \mathbb{C}^{d(n-d)}$$

$$U_\phi \hookrightarrow V_d(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\pi} Gr(d,\mathbb{C}^n) = X$$

は単射.

その像を $\mathcal{U}_\phi \subset Gr(d,\mathbb{C}^n)$ と書く. 開集合

大 〃

命題 $\mathcal{U}_\phi = \{ V \in Gr(d,\mathbb{C}^n) \mid F^d \cap V = \{0\} \}$

$$F^d = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \right\} \ (\cong \mathbb{C}^{n-d})$$

証) $V \in \mathcal{U}_\phi$ ならば $V = \pi(v_1,\dots,v_d)$, $(v_1,\dots,v_d) \in U_\phi$ とかける.

つまり $v_i = e_i + w_i$ $(w_i \in F^d)$ なので $F^d \cap V = \{0\}$.

逆に $V \in Gr(d,\mathbb{C}^n)$ が $F^d \cap V = \{0\}$ をみたすとすると.

$V \hookrightarrow \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n/F^d$ は単射かつ全射.

$\mathbb{C}^n/F^d$ の基底として $e_1 \bmod F^d, \dots, e_d \bmod F^d$

の逆像を $v_1, \dots, v_d$ とおれば

$\langle v_1, \dots, v_d \rangle = V \in \mathcal{U}_\phi$ が分かる.

$$U_I := \left\{ \begin{array}{c} \\ i_1 \\ \\ i_2 \\ \\ \\ i_d \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \\ * & * & * \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{C}^{d(n-d)}$$

$I \subset \{1, \dots, n\}$

$1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n$

$\updownarrow$

$\binom{[n]}{d}$

$\mathcal{U}_I = \pi(U_I) \subset Gr(d, \mathbb{C}^n)$

このとき $Gr(d, \mathbb{C}^n) = \bigcup_{I \in \binom{[n]}{d}} \mathcal{U}_I$

複素多様体の構造をもつ

$$B_- = \left\{ \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & * \end{pmatrix} \right\} \subset GL_n(\mathbb{C})$$

(Borel部分群)　　$Gr(d, \mathbb{C}^n)$ を B_- 軌道に分割する.

$$\{ Gr(d, \mathbb{C}^n) \text{ の } B_- \text{軌道} \} \overset{\cong}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \\ n-d \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_d \geq 0 \end{array} \right\} =: Y_d(n)$$

$$\mathcal{O}_\lambda \longmapsto \lambda$$

O_λ の余次元 $= |\lambda| := \sum_{i=1}^{d} \lambda_i$

特に

$\binom{[n]}{d} \overset{\cong}{\longleftrightarrow} \mathcal{Y}_d(n)$

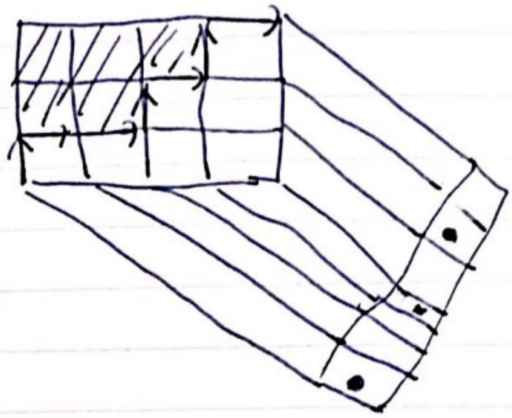
$1 \le i_1 < \cdots < i_d \le n$ $\quad$ $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$

$n-d \ge \lambda_1$

$i_k - k = \lambda_{d-k+1}$

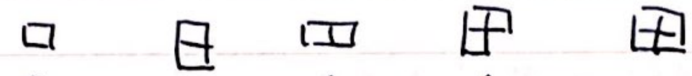
$d=3$, $n=7$

$\mathcal{Y}_d(n)$



$\mathcal{Y}_2(4)$: $(0,0)$ $\quad (1,0)$ $\quad (1,1)$ $\quad (2,0)$ $\quad (2,1)$ $\quad (2,2)$

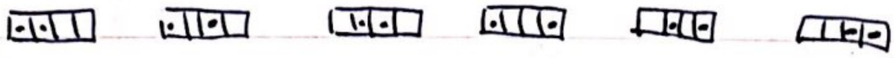
$\varnothing$



$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$

$\{1,2\}$ $\quad \{1,3\}$ $\quad \{2,3\}$ $\quad \{\cancel{2,3}\}$ 1,4 $\quad \{2,4\}$ $\quad \{3,4\}$

$\binom{[4]}{2}$ Maya図形



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

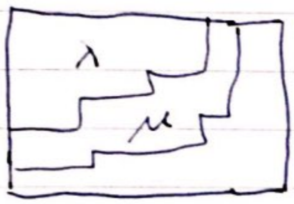
$\lambda \longleftrightarrow \underset{i_1 < \cdots < i_k}{I}$ $\qquad$ $e_\lambda = e_I = \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_d} \rangle$ と定める.

$O_\lambda := B_- e_\lambda$: $\mathcal{U}_I$ に含まれる cell

$\cong U_I$

命題 $\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$ に対し

$$\Omega_\lambda := \overline{\mathcal{O}_\lambda} = \coprod_{\mu \supset \lambda} \mathcal{O}_\mu$$



$\lambda_i \leqq \mu_i \quad (1 \leqq i \leqq d)$

命題 $$\Omega_\lambda = \left\{ V \in Gr(d, \mathbb{C}^n) \;\middle|\; \begin{array}{c} \dim(F^{\lambda_i+d-i} \cap V) \geqq i \\ (1 \leqq i \leqq d) \end{array} \right\}$$

$$F^k = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \right\} k \qquad \mathbb{C}^n = F^0 \supset F^1 \supset \cdots \supset F^n = \{0\}$$

旗

例 $Gr(2, \mathbb{C}^4)$

$\mathcal{O}_{\square} \cup \mathcal{O}_{\square\square} \cup \mathcal{O}_{\boxminus} \cup \mathcal{O}_{\boxminus} \cup \mathcal{O}_{\boxplus} = \Omega_{\square} \left(\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \end{array} \right.$ $\quad \dim(F^{1+2-1} \cap V) \geqq 1$

$\times \quad \dim(F^{0+2-2} \cap V) \geqq 2$, $F^{0+2-2} = \mathbb{C}^4$

$$\Omega_{\square\square} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^4/F^3) \cong \mathbb{P}^2$$

$\lambda_1 = 2 \qquad \dim(V \cap F^{2+2-1}) \geqq 1 \iff F^3 \subset V$

$\lambda_2 = 0 \qquad \dim(V \cap F^{0+2-2}) \geqq 2$

$$F^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix} \right\}$$

$\updownarrow$

e_4

$\Omega_{\boxminus}$ $\quad \dim(V \cap F^{1+2-2}) \geqq 2 \iff V \subset F^1 (\cong \mathbb{C}^3)$

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 1$

$F^1 \cong \mathbb{C}^3$

$\ell \subset e_0 \qquad Gr(2, F^2) = \mathbb{P}^\vee(F^1) \cong \mathbb{P}^2$

$\Omega_{\boxplus}$ $\quad \begin{matrix} F^3 & \subset V \subset & F^1 \\ \| & & \| \\ \mathbb{C} & & \mathbb{C}^3 \end{matrix} \qquad \mathbb{P}(F^1/F^3) \cong \mathbb{P}^1$

§.2 交叉理論

$|\lambda^{(1)}| + \cdots + |\lambda^{(r)}| = d(n-d)$

$\# \; \Omega_{\lambda_1}(F^\bullet_{(1)}) \cap \cdots \cap \Omega_{\lambda^{(r)}}(F^\bullet_{(r)})$

$F^\bullet_{(1)}, \cdots, F^\bullet_{(r)}$ 　一定の有限値.
を一般にとる.

今日はここまで

2日目

$\mathbb{C}^N$ 内 $\Omega_\lambda(F^\bullet_{(1)}) \cap \Omega_\mu(F^\bullet_{(2)}) \neq \phi$ ための条件

旗 $F^\bullet$ と $E^\bullet$ が一般の位置関係にある.

$$\underset{\text{def}}{\iff} \quad F^i \cap E_i = \{0\} \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$(E_i := E^{n-i})$$

$$F^d \cap V = \{0\} \iff V \in \mathcal{U}_\phi$$

このとき $\mathbb{C}^n$ の基底 $a_1, \dots, a_n$ を

$$F^i = \langle a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$$
$$E_i = \langle a_1, \dots, a_i \rangle$$

となるようにとれる.

以下 $F^i = \langle e_{i+1}, \dots, e_n \rangle$ $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$ (i 個の 0)

$E_i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle =: F_{op}^{n-i}$ $\quad \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (i 個の $*$)

$\boxed{i^* = d - i + 1}$

$\Omega_\lambda(F^\bullet)$: $\dim(F^{\lambda_i + d - i} \cap V) \geq i \quad (1 \leq i \leq d)$

$\Omega_\mu(F^\bullet_{op})$: $\dim(F_{op}^{\mu_{i^*} + d - i^*} \cap V) \geq i^* \quad (1 \leq i^* \leq d)$

$V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F^\bullet_{op})$

とする

$$A_i := F^{\lambda_i + d - i} \qquad B_i := F_{op}^{\mu_{i^*} + d - i^*}$$

$\dim(A_i \cap B_i \cap V) \geq 1$ 　特に $\dim(A_i \cap B_i) \geq 1$

$$A_i := F^{\lambda_i + d - i} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \right\} \leftarrow a(i) \text{ 番目}$$

$$B_i := F_{op}^{\mu_{i^*} + d - i^*} = \left\{ \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftarrow b(i) \text{ 番目}$$

$a(i)$, $b(i)$ を上のように定めると

$a(i) = \lambda_i + d - i + 1$

$b(i) = n - \mu_{i^*} - i + 1$

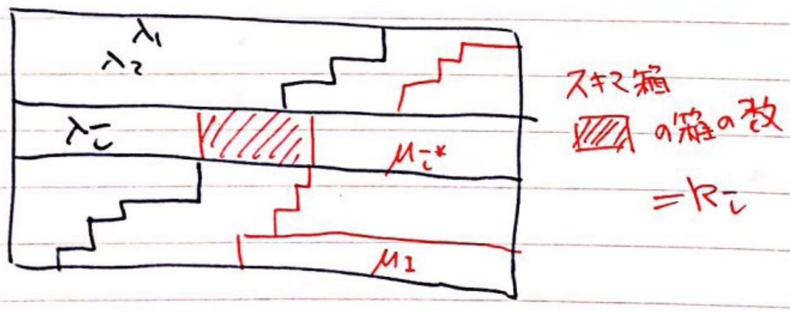
$W_i = A_i \cap B_i$ とおく.

特に $\dim(A_i \cap B_i) \geq 1$

$\Updownarrow$

$a(i) \leq b(i)$

$k_i = b(i) - a(i)$ とおく $\rightsquigarrow$ $\dim W_i = k_i + 1$



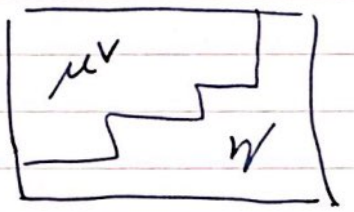
$$\boxed{\lambda_i + \mu_{i^*} + k_i = n - d}$$

$$\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F^\bullet_{op}) \neq \emptyset$$

$$\Longrightarrow \quad k_i \geqq 0 \quad (1 \leqq i \leqq d)$$

逆も成り立つ $(\Longleftrightarrow \lambda_i + \mu_{i^*} \leqq n-d \Longleftrightarrow \lambda \subset \mu^\vee$

$$\boxed{\mu_i^\vee = n-d-\mu_{i^*}}$$



系 $|\lambda| + |\mu| > d(n-d)$

$$\Longrightarrow \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F^\bullet_{op}) = \emptyset$$

定理 $|\lambda| + |\mu| = d(n-d)$ のとき

$$\# \, \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F^\bullet_{op}) = \begin{cases} 1 & \lambda = \mu^\vee \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

証) $\lambda = \mu^\vee$ のとき $b(i) = a(i)$

$W_i = \mathbb{C}\, e_{a(i)}$ となっている.

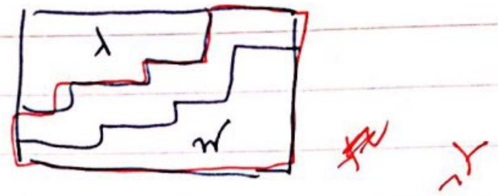
$\dim(W_i \cap V) \geqq 1 \Rightarrow e_{a(i)} \in V$

$$V = \langle e_{a(1)}, \cdots, e_{a(d)} \rangle.$$

$\lambda \neq \mu^\vee$ のとき. $\lambda_i + \mu_{i^*} > n-d \quad (\exists i)$

このときは $\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F^\bullet_{op}) = \emptyset$ ∎

<u>命題の逆</u> $\lambda \subset \mu^\vee$



$$\phi \neq \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_{\lambda^\vee}(F^\bullet_{op}) \subset \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F^\bullet_{op})$$

(注) <u>近傍</u> で 1点(交点)を見ると.

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

e_λ の近傍で

$\Omega_\lambda(F^\bullet)$ を見る. $\Omega_{\lambda^\vee}(F^\bullet_{op})$ を見る.

$X, Y \subset Z$ closed p において X と Y が横断的(transversal)に交わる.

$p \in X \cap Y$ $T_pX \cap T_pY = T_p(X \cap Y)$

(1) $G = GL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright X = Gr(d, \mathbb{C}^n)$ transitive

(2) 標数 0

$Y \subset X$ 既約 余次元 k の閉部分多様体 (Ω_λ など)

$$H^*(X) := \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)} \mathbb{Z}\sigma_\lambda$$ 自由アーベル群.

コホモロジー環

(交叉環, chow 環)

$$[Y] := \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{Y}_d(n) \\ |\lambda| = k}} \#(Y \cap \Omega_{\lambda^\vee}(F^\bullet))\, \sigma_\lambda$$

$\uparrow$ Yに対して十分一般

これは well-defined である.

(Kleiman の横断性定理)

<u>例</u> $[\Omega_\lambda] = \sigma_\lambda$

$\because$ $$[\Omega_\lambda(F^\bullet)] = \sum_{|\lambda| = |\mu|} \# \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_{\mu^\vee}(E^\bullet)$$
$$= \sigma_\lambda$$

$\lambda \subset \mu^\vee$ と仮定.

$\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F^\bullet_{op})$ は既約で

余次元 $|\lambda| + |\mu|$ である.

Richardson var.

$$[\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F^\bullet_{op})] = \sum_{|\nu| = |\lambda| + |\mu|} \#(\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F^\bullet_{op}) \cap \Omega_{\nu^\vee}(E^\bullet)) \cdot \sigma_\nu$$

これを $\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu$ と定める.

$\lambda \subset \mu^\vee$ が成りたたなければ $\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = 0$

<u>定理</u>　この"積"により $H^*(Gr(d,\mathbb{C}^n))$ は結合的、可換な環

定理 (Pieri の規則)　$1 \leq k \leq n-d$

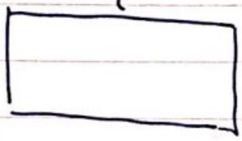
$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_k = \sum_\nu \sigma_\nu$$

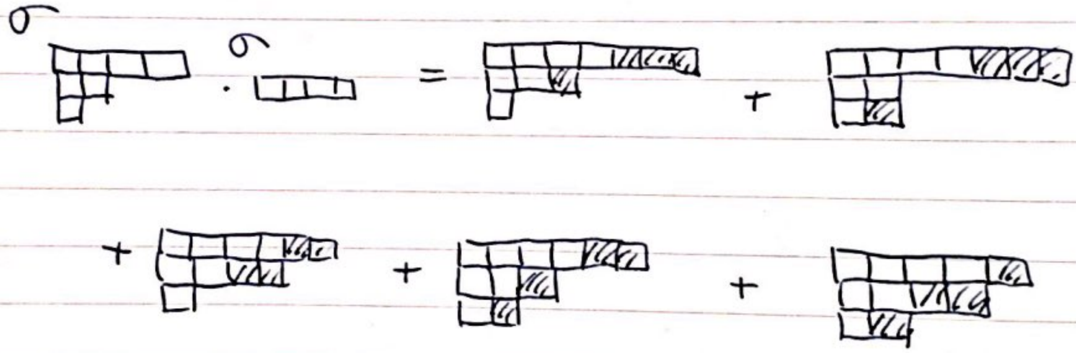
$|\nu| = |\lambda| + k$, ν は λ にサイズ k の
水平帯を加えて得られる.

~~[illegible]~~ $\boxed{\lambda \subset \nu}$

<u>例</u>

7

3 　$d=3$, $n=10$



(証明の概略)

$$\# \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_{\nu^\vee}(F^\bullet_{op}) \cap \Omega_k(E^\bullet)$$

ν/λ が水平帯のとき 1
そうでないとき 0

あとで

L: 余次元 $k+d-1$
$\dim(L \cap V) \geq 1$
$\Leftrightarrow V \in \Omega_k(L)$

今日はここまで

3日目

前提 $\boxed{\lambda \subset \nu}$

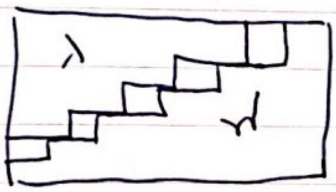
$\mu = \nu^\vee$ → 空でない

Pieri 規則の証明

余次元 $k+d-1$

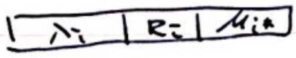
$$\underbrace{\boxed{\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F^\bullet_{op})}}_{} \cap \underbrace{\Omega_k(L)}_{\dim(L \cap V) \geq 1}$$

$1 \leq k \leq n-d$



$\dim(L \cap V) \geq 1$

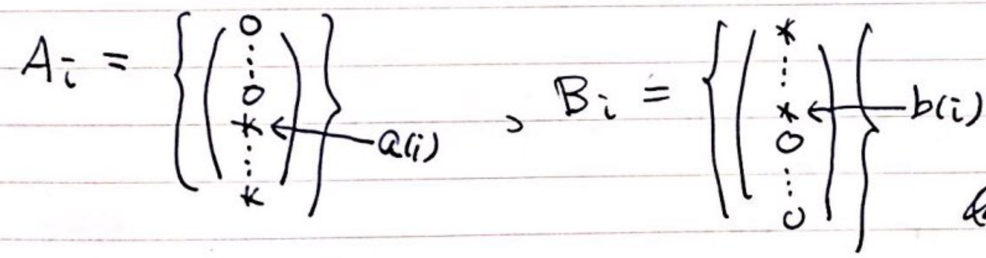
スキマ



$k_i \geq 0$

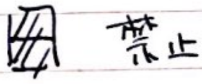
$A_i = F^{\lambda_i+d-i}$, $B_i = F_{op}^{\mu_{i^*}+d-i^*}$, $W_i := A_i \cap B_i$,

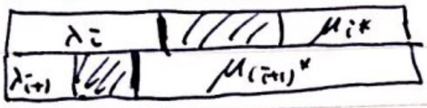
$W := \sum_{i=1}^{d} W_i$ $\quad (i^* = d-i+1)$ ← 線形 $\dim W_i = k_i + 1$



$b(i) = a(i) + k_i$

ν/λ が水平帯





O.K.

NG

水平帯 : $\lambda_i + \mu_{(i+1)^*} \geq n-d \quad (1 \leq i \leq d-1)$

$\Leftrightarrow b(i+1) < a(i) \quad (1 \leq i \leq d-1)$

$\Rightarrow W = \bigoplus_{i=1}^{d} W_i$

このとき $\dim W = \sum_{i=1}^{d}(k_i+1)$

$= \sum_{i=1}^{d} k_i + d$

$= k+d$

L をどうとっても $\dim(W\cap L) \geqq 1$

$\dim(W\cap L) = 1$ となるようにとる.

$W\cap L = \mathbb{C}v$ とする.

$W \ni v = \sum_{i=1}^{d} v_i \quad (v_i \in W_i)$

更に $v_i \neq 0 \ (\forall i)$ 仮定.

$V \in \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F^\bullet_{op})$ とする

(1) $V \subset W$ (略)

(2) $\dim(L\cap V) \geqq 1$ (Schubert 条件)

(3) $W\cap L = \mathbb{C}v \quad (v\neq 0)$

$\Longrightarrow v \in V$

$V = \bigoplus_{i=1}^{d} V\cap W_i$ に注意

したがって $v_i \in V \ (\forall i)$

$\therefore v_1, \dots, v_d$ は 1次独立.

$V = \langle v_1, \dots, v_d \rangle$ 」

1点!

ν/λ が水平帯でないとき.

$$\dim W < k+d$$

L を十分にとれば $L \cap W = \{0\}$

もしも $V \in \Omega_\lambda^{(F^\cdot)} \cap \Omega_\mu^{(F^\cdot_{op})} \cap \Omega_k^{(L)}$ があれば‥

よって ϕ　　　　$V \subset W$ (上の(i))

系. (Giambelliの公式)

$$\sigma_\lambda = \begin{vmatrix} \sigma_{\lambda_1} & \sigma_{\lambda_1+1} & \cdots & \sigma_{\lambda_1+d-1} \\ \sigma_{\lambda_2-1} & \sigma_{\lambda_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{\lambda_d-d+1} & \cdots & & \sigma_{\lambda_d} \end{vmatrix}$$

補題

$$\sigma_\lambda = \sum_{i=1}^{d} (-1)^{d-i} \sigma_{\lambda_1, \cdots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}-1, \cdots, \lambda_d-1} \cdot \underline{\underline{\sigma_{\lambda_i+d-i}}}$$

(証明) Pieri規則による.

命題 $R = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)} \mathbb{Z}\tau_\lambda$ 環

において Pieri 規則 が成立つとする。

$\Longrightarrow R \cong H^*(Gr(d, \mathbb{C}^n))$ 環の同型

$\tau_\lambda \longleftrightarrow \sigma_\lambda$

Pieri ルールのみで
$H^*(Gr(d, \mathbb{C}^n))$ の環構造が
決まってしまう!

§3 Schur 関数 (多項式)

$\mathcal{Y}_d$: $\lambda = (\lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_d \geqq 0)$

に対して

$$S_\lambda(z_1, \cdots, z_d) = \frac{\det\left(z_i^{\lambda_j + d - j}\right)_{1 \leq i, j \leq d}}{\prod_{1 \leq i < j \leq d} (z_i - z_j)}$$

対称多項式.

命題 $\mathbb{Z}[z_1, \cdots, z_d]^{S_d} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{Y}_d} \mathbb{Z}\, S_\lambda(z_1, \cdots, z_d)$

(1) $S_\lambda \cdot S_k = \sum_{\nu} S_\nu$ Pieri 規則

$\nu \supset \lambda$, ν/λ は水平帯.

(より一般に $S_\lambda S_\mu = \sum_{\nu} c^{\nu}_{\lambda\mu} S_\nu$)

完全にわかる.

(2) $S_\lambda = \det(S_{\lambda_i + j - i})_{1 \leqq i,j \leqq d}$

Jacobi–Trudi 公式

(3)
$$I_n = \bigoplus_{\mu \not\subset d\,\overset{n-d}{\boxed{}}} \mathbb{Z}\, S_\mu(z_1, \dots, z_d)$$

(i.e. $\mu_1 > n-d$)

は $\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_d]^{S_d}$ のイデアルをなす.

<u>定理</u> $\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_d]^{S_d} / I_n \cong H^*(Gr(d, \mathbb{C}^n))$

$S_\lambda \bmod I_n \longleftrightarrow \sigma_\lambda$

$(\lambda \in Y_d(n))$

Littlewood-Richardson 規則

$$S_\lambda \cdot S_\mu = \sum_{\substack{\nu \\ |\nu| = |\lambda| + |\mu|}} c^{\nu}_{\lambda\mu} S_\nu$$

semistandard tableaux

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 4 \\ \cline{1-3} 4 \\ \cline{1-1} \end{array} \leftarrow 1 \sim d$$

$SST(\lambda)$

$\omega(T) = (2, 3, 1, 2) \in \mathbb{Z}^d$

weight

定理 $\displaystyle S_\lambda(z_1, \ldots, z_d) = \sum_{T \in SST(\lambda)} z^{\omega(T)}$

系 $\displaystyle S_{\underbrace{\boxed{1 \cdots 1}}_{k}}(z_1, \ldots, z_d) = h_k(z_1, \ldots, z_d)$

$$= \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le d} z_{i_1} \cdots z_{i_k}$$

$$S_{\boxed{\vdots}\,k}(z_1, \ldots, z_d) = e_k(z_1, \ldots, z_d)$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le d} z_{i_1} \cdots z_{i_k}$$

例 $d=3$, $\lambda =$ 

$1 \longleftrightarrow 2$

$2 \longleftrightarrow 3$

$$\begin{array}{cc}1&1\\2\end{array}\quad \begin{array}{cc}1&1\\3\end{array}\quad \begin{array}{cc}1&2\\2\end{array}\quad \begin{array}{cc}1&2\\3\end{array}\quad \begin{array}{cc}1&3\\2\end{array}\quad \begin{array}{cc}1&3\\3\end{array}\quad \begin{array}{cc}2&2\\3\end{array}\quad \begin{array}{cc}2&3\\3\end{array}$$

$$z_1^2 z_2 \quad z_1^2 z_3 \quad z_1 z_2^2 \quad z_1 z_2 z_3 \quad z_1 z_2 z_3 \quad z_1 z_3^2 \quad z_2^2 z_3 \quad z_2 z_3^2$$

Involusions σ_i $(1 \leq i \leq n-1)$

$$\sigma_i^2 = id$$

$\boxed{\begin{array}{c} i \\ \hline i+1 \end{array}}$ 変えない.　その他の i, $i+1$: "自由"

各行で見ると 自由な entries は

$$\overbrace{\boxed{i}\,\boxed{i}\,\boxed{i}\cdots\boxed{i}}^{a}\,\overbrace{\boxed{i+1}\,\boxed{i+1}\cdots\boxed{i+1}}^{b}$$

$$\overbrace{\boxed{i}\cdots\boxed{i}}^{b}\,\overbrace{\boxed{i+1}\cdots\boxed{i+1}}^{a}$$

$$w(\sigma_i(T)) = r_i(w(T))$$

$(i, i+1)$ 成分交換

σ_i : Bender - Knuth's involutions

LR 規則の証明 (Stembridge)

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$

に対して $A_\alpha := \det(z_i^{\alpha_j})_{1 \leq i, j \leq d}$

(注) $\delta_d = (d-1, d-2, \cdots, 1, 0)$ とおく

$$A_{\delta_d} = \prod_{1 \leq i < j \leq d} (z_i - z_j)$$

$\lambda \in \mathcal{Y}_d$ に対して

$$S_\lambda(z_1, \cdots, z_d) = \frac{A_{\lambda+\delta_d}}{A_{\delta_d}}$$

$$T_\lambda(z) := \sum_{T \in SST(\lambda)} z^{w(T)}$$

$$A_{\lambda+\delta_d} T_\mu = \left(\boxed{\sum_{w \in S_d} \mathrm{sgn}(w) w} (z^{\lambda+\delta_d}) \right) \cdot T_\mu \quad = \left(\sum_{T \in SST(\mu)} z^{w(T)} \right)$$

$$\underset{T_\mu \text{が対称}}{=} \sum_{w \in S_d} \mathrm{sgn}(w) w \left(z^{\lambda+\delta_d} \sum_{T \in SST(\mu)} z^{w(T)} \right)$$

$$= \sum_{T \in SST(\mu)} A_{\lambda+\delta_d+w(T)}$$

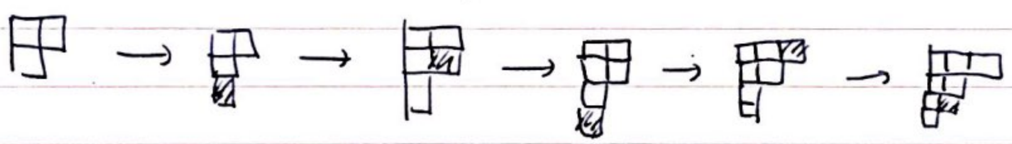
定義 $\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_d$, $T \in SST(\mu)$ とする.

T が λ-good $\Longleftrightarrow$ $\{\lambda + \omega(\mathbb{C}(T)_{\leq j})\} \in \mathcal{Y}_d$

$(\forall j)$

$$T = \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & \\ 4 & & & \end{matrix} \qquad \mathbb{C}(T) = \underbrace{223}_{\leq 3}13124$$

$\lambda =$  $\quad T = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & \end{matrix} \quad \mathbb{C}(T) = 32413$



今日はここまで

4日目

定理 $c^{\nu}_{\lambda\mu} = \# SST(\mu)^{\lambda\text{-good}}_{\nu-\lambda}$

$w(T) = \nu - \lambda$

証明) … $\displaystyle\sum_{T \in SST(\mu)^{\lambda\text{-bad}}} A_{\lambda+\delta_d+w(T)} = 0$

$A_{\lambda+\delta_d} T_\mu$

(注) T が λ-good ⇒ $\underbrace{\lambda + w(T)}_{\nu} \in \mathcal{Y}_d(n)$

$SST(\mu)^{\lambda\text{-bad}}$ の上に対合を作る
(involution)

bad letter k

例 σ_1 ($=\sigma_{k-1}$) the first bad box

$$T = \begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 & \boxed{2} & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & \\ 3 & 4 & & & & \end{array}$$

$d = 4$

$\lambda = \boxed{}\!\!\boxed{}$, $c(T) = 3242323134123$

左側に σ_{k-1} を施こす. T^*

- $T^* \in SST(\mu)$
- T^* が λ-bad (明らか)
- $(T^*)^* = T$ (明らか)

• $\lambda + \delta_d + w(T^*) = r_{k-1}\left(\lambda + \delta_d + w(T)\right)$

$T^* = T$ ならば $\quad A_{\lambda+\delta_d+w(T)} = 0$

$T^* \neq T$ 〃 $\quad A_{\lambda+\delta_d+w(T)} + A_{\lambda+\delta_d+w(T^*)} = 0$

◎ $$S_\mu(z_1, \dots, z_d) = \sum_{T \in SST(\mu)} z^{w(T)}$$

㊀ $\lambda = \phi$ $$A_{\delta_d} T_\mu = \sum_{T \in SST(\mu)^{\phi\text{-good}}} A_{\delta_d + w(T)} = A_{\delta_d + \mu}$$

(注目) $SST(\mu)^{\phi\text{-good}}$ はただ1つの元 T_0 が存在する

s.t. $w(T_0) = \mu$

R. Vakil
geometric
LR-rule

§4 T同変コホモロジー

$T \curvearrowright X = Gr(d, \mathbb{C}^n)$

$SL_n(\mathbb{C})$の極大トーラス

$(GL_n(\mathbb{C})$ 〃 $)$ $H_T^*(Gr(d,\mathbb{C}^n))$

<u>局所化</u>

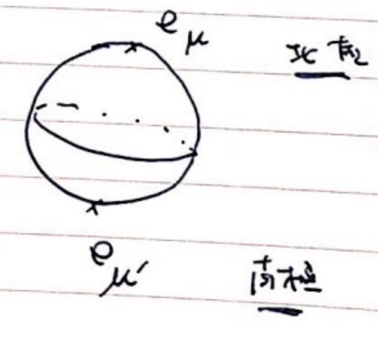
頂点 • $X^T = \{ e_\mu \mid \mu \in \mathcal{Y}_d(n) \}$

$\mu \longleftrightarrow I \in \binom{[n]}{d}$

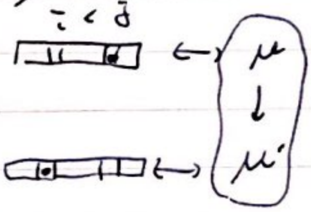
$I = \{ i_1, \dots, i_d \}$

$\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_d} \rangle$

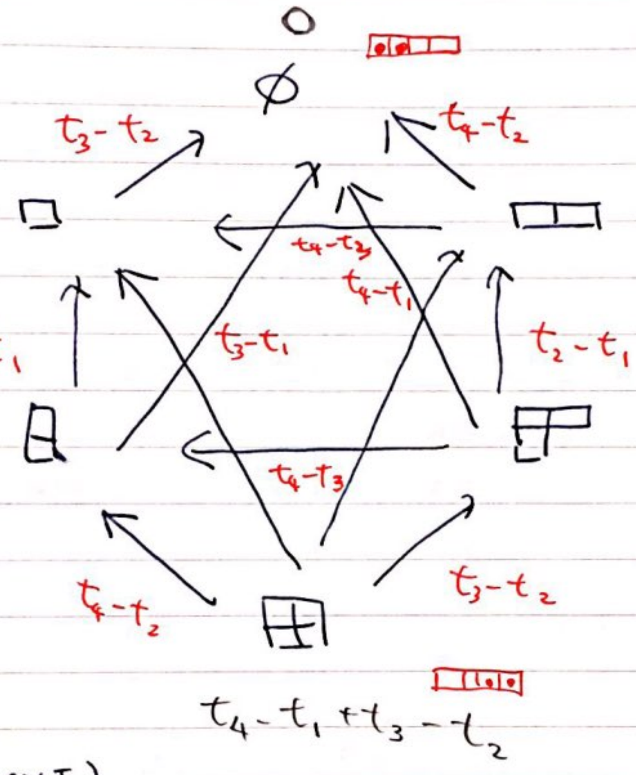
辺 • $\{ T\text{-stable な } \mathbb{P}^1 \} \cong \{ \mu \longrightarrow \mu' \}$



GKM (Goresky – Kottwitz – MacPherson) グラフ



$Gr(2, \mathbb{C}^4)$



t_3-t_2

t_4-t_2

$\sigma_\square^T$

$(2,2)$

t_4-t_1

t_3-t_1

$(2,2)$

$\iota : X^T \hookrightarrow X$

$H_T^*(X) \xrightarrow{\iota^*} H_T^*(X^T)$

辺の weight

$t_j - t_i$

定理 (GKM)

$$\xi \in Map(X^T, \underset{\substack{\parallel \\ H_T^*(pt)}}{\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]}) = H_T^*(X^T)$$

に対して $\xi|_\mu - \xi|_{\mu'}$ が weight $(\mu \to \mu')$ で割れる.

という条件で定まる部分環は $H_T^*(Gr(d, \mathbb{C}^n))$ と同一視できる.

Ω_λ は T- stable

$\rightsquigarrow \ [\Omega_\lambda]_T \in H_T^*(Gr(d, \mathbb{C}^n))$

σ_λ^T $=$

(1) $\sigma_\lambda^T|_\mu$ は 0 または $|\lambda|$ 次斉次

(2) $\sigma_\lambda^T|_\lambda = \prod_{\substack{\lambda \to \lambda' \\ (i,j)}} (t_j - t_i) = E(\lambda)$

(注) $o_\mu \in \Omega_\lambda \iff \lambda \subset \mu$

(3) $\lambda \not\subset \mu$ のとき $\sigma_\lambda^T|_\mu = 0$

(この条件で σ_λ^T は特徴付られる)
(略)

定理

$\{\sigma_\lambda^T\}_{\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)}$ は $H_T^*(Gr(d, \mathbb{C}^n))$ の

$H_T^*(pt)$ 加群としての基底.

(略証) (1次独立性) $\sum_\lambda c_\lambda \sigma_\lambda = 0$ (非自明)

$c_\lambda \neq 0$ である λ のうちで 極小なものをとる

λ_0

$|_{\lambda_0} \rightsquigarrow c_{\lambda_0} \sigma_{\lambda_0}|_{\lambda_0} = 0$

$\neq 0$ $\neq 0$ (2) 矛盾.

$\lambda_0 \not\supset \mu \Rightarrow c_\mu = 0$

spam すること

ξ を $H_T^*(Gr(d, \mathbb{C}^n))$ の元とする.

$\mathrm{supp}(\xi) = \{\mu \mid \xi|_\mu \neq 0\}$ の極小元 μ を見る.

$\Longrightarrow \xi|_\mu$ は $E(\mu)$ でわれる.

$$\xi|_\mu = c \cdot E(\mu)$$

$\xi - c \cdot \sigma_\mu$ を考える. //

$$\mathbb{Z}[t] = \mathbb{Z}[t_1, t_2, \cdots]$$

$\mathbb{Z}[t][z_1, \cdots, z_d]^{S_d}$ の元

$$S_\lambda(z_1, \cdots, z_d \mid t) = \frac{\det((z_i \mid t)^{\lambda_j + d - j})_{d \times d}}{\prod_{1 \leq i < j \leq d}(z_i - z_j)}$$

Factorial Schur functions

$\lambda \in \mathcal{Y}_d$

$$(z \mid t)^k = \begin{cases} (z - t_1) \cdots (z - t_k) & k \geq 1 \\ 1 & k = 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

定理 $\mathbb{Z}[t][z_1,\dots,z_d]^{S_d} \xrightarrow[\pi_n]{} H_T^*(Gr(d,\mathbb{C}^n))$

KT (Molev-Sagan cf.) $\pi_n(S_\lambda(z_1,\dots,z_d|t)) = \begin{cases} \sigma_\lambda^T & (\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

(π_nの作り方) $f(z|t)$に対して

代入 $\begin{cases} z_i \longmapsto t_{\mu_i+d-i+1} & (1 \le i \le d) \\ t_j \longmapsto \begin{cases} t_j & (j \le n) \\ 0 & (j > n) \end{cases} \end{cases}$ の

結果を $f(t_\mu|t) \in \mathbb{Z}[t_1,\dots,t_n]$と書く.

$(f(t_\mu|t))_{\mu \in \mathcal{Y}_d(n)}$ が $H_T^*(Gr(d,\mathbb{C}^n))$の元を与える.

$S_\square(z_1,z_2|t) = z_1+z_2-t_1-t_2$

GKM条件を満たす理由.

($\because$ 因数定理)

$\lambda \in \mathcal{Y}_d(n)$ のとき

$\pi_n(S_\lambda(z_1,\dots,z_d|t)) = \sigma_\lambda^T$

(1) 明らか.

(2) $S_\lambda(t_\lambda|t) = E(\lambda)$ 　　分子の行列 上三角

(3) $\lambda \not\leq \mu$ とする. $\lambda_i > \mu_i$ となる最小の i で

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & (1) & (1) & \cdots & (1) \\
 & & (1) & \cdots & (1) \\
i & 0 & & \ddots & \\
 & & & & (1) \\
\end{array}
\qquad i
$$

<u>補題</u> $c^{\mu}_{\lambda\mu} = \sigma^T_\lambda|_\mu$

$\in H^*_T(pt)$

<u>Fact</u> $H^*_T(Gr(d,\mathbb{C}^n)) \otimes_{H^*_T(pt)} \mathbb{Z} \cong H^*(Gr(d,\mathbb{C}^n))$

(t_i を 0に特殊化 $H^*_T(pt) \longrightarrow \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow$ $|\nu| = |\lambda| + |\mu|$ ならば

$c^\nu_{\lambda\mu}$ は $H^*(Gr(d,\mathbb{C}^n))$ のときと同じ

同変 Chevalley 公式

$$\sigma^T_\lambda \cdot \sigma^T_\square = (\sigma^T_\square|_\lambda)\sigma^T_\lambda + \sum \sigma^T_\nu$$

ν は λ に $\square$ をひっつける.

, $\sigma^T_\square|_\lambda = t_{i_1} + \cdots + t_{i_d} - \sum_{i=1}^{d} t_i$

$\lambda \leftrightarrow I = \{i_1,\dots,i_d\}$

今日はここまで.

§5. 重複度

$$A = \bigoplus_{n \geqq 0} A_n$$ ネーター次数付 $\mathbb{C}$代数

$A_0 = \mathbb{C}$, A_1 により生成される.

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$$

次数付 A 加群　$A_n M_m \subset M_{n+m}$

ヒルベルト級数

$$H_M(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\dim_{\mathbb{C}} M_n) u^n$$

$$\underset{\text{定理}}{=} \frac{G(u)}{(1-u)^d}$$

$\dim M$

$\exists d \geqq 0$, $\exists G(u) \in \mathbb{Z}[u, u^{-1}]$, $G(1) \neq 0$

$$e_M := G(1) \ (\in \mathbb{Z}_{>0})$$

(R, m) ネーター局所環

↑ 極大イデアル　　$R/m \cong \mathbb{C}$ とする.

$$A = \mathrm{gr}_m R := \bigoplus_{n \geq 0} m^n / m^{n+1}$$

↑ 次数付 $\mathbb{C}$ 代数.

$m^0 = R$,

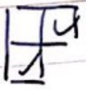
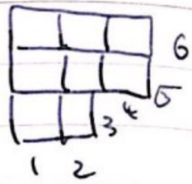
$$\mathrm{mult}(R) := e_{\mathrm{gr}_m R}$$

Hilbert-Samuel multiplicity

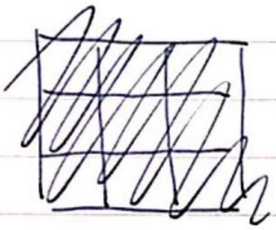
$\mathrm{mult}(R) = 1 \iff R$ が正則.

$$R = \mathcal{O}_{e_\mu, \Omega_\lambda} , \quad m = m_{e_\mu}$$

$\boxed{\mathrm{mult}(\mathcal{O}_{e_\mu, \Omega_\lambda}) \text{ を求める.}}$ $\left(\begin{array}{l} \lambda \subset \mu \\ e_\mu \in \Omega_\lambda \end{array} \right)$

例 $n=6$, $d=3$, $\lambda=$  , $\mu=$ 

Ω_λ



e_μ の近傍

$$\mathcal{U}_\mu : \begin{array}{c} \\ \\ 3) \\ \\ 5) \\ 6) \end{array} \left(\begin{array}{ccc} z_{13} & z_{15} & z_{16} \\ z_{23} & z_{25} & z_{26} \\ 1 & 0 & 0 \\ z_{43} & z_{45} & z_{46} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \} M_2 \\ \} M_4 \end{array}$$

$F^{\lambda_i + d - i}$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$

- $\dim(F^{2+3-1} \cap V) \geq 1$

$V \hookrightarrow \mathbb{C}^6 \longrightarrow \mathbb{C}^6 / F^4$

の rank が 2 以下

: M_4 の 3×3 minors が 0

- $\dim(F^{1+3-2} \cap V) \geq 2$

$V \hookrightarrow \mathbb{C}^6 \longrightarrow \mathbb{C}^6 / F^2$

の rank が 1 以下

: M_2 の minors が 0
2×2

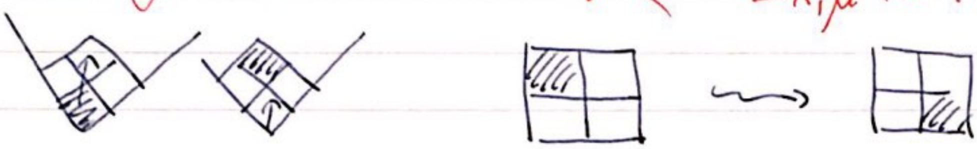
Scanned with CamScanner

$\mathbb{C}[\Omega_\lambda \cap \mathcal{U}_\mu] = \mathbb{C}[\mathcal{U}_\mu] / I_{\lambda,\mu}$

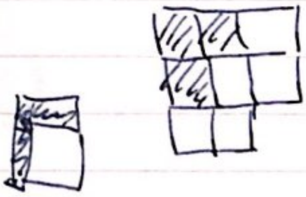
これらの minors が $I_{\lambda,\mu}$ を生成.

(minors が radical ideal を生成する.)

$\mathrm{gr}_m \mathcal{O}_{e_\mu,\Omega_\lambda} \cong \mathbb{C}[\Omega_\lambda \cap \mathcal{U}_\mu] \leftarrow$ $I_{\lambda,\mu}$ は斉次イデアル.



excitation



$\mathcal{E}_\mu(\lambda)$

定理 ($\lambda \subset \mu$) $\quad \mathrm{mult}\, \mathcal{O}_{e_\mu, \Omega_\lambda} = \# \mathcal{E}_\mu(\lambda)$

(注) $\quad p \in \mathbb{O}_\mu \Rightarrow \mathrm{mult}\, \mathcal{O}_{p, \Omega_\lambda}$

$= \mathrm{mult}\, \mathcal{O}_{e_\mu, \Omega_\lambda}$

問. Ω_λ が非特異 $\Longleftrightarrow \# \mathcal{E}_\mu(\lambda) = 1$

$(\forall \mu \supset \lambda)$

これ. 非特異な Schubert var. は小さい Grassman.

方法

$$\begin{tikzcd}
\sigma^T_\lambda|_\mu \arrow[d, squiggly] & \mathrm{ch}\ \mathbb{C}[\Omega_\lambda \cap \mathcal{U}_\mu] \arrow[l, squiggly] \arrow[d, dotted] \\
\mathrm{mult}\ \Theta_{e_\mu, \Omega_\lambda} & H^{(u)}_{\mathbb{C}[\Omega_\lambda \cap \mathcal{U}_\mu]} \arrow[l, squiggly]
\end{tikzcd}$$

T加群.

ポイント

$\boxed{I_{\lambda,\mu}\text{は斉次イデアル}} \Rightarrow gr_m\, \mathcal{O}_{e_\mu, \Omega_\lambda} \cong \mathbb{C}[\Omega_\lambda \cap \mathcal{U}_\mu]$

$\phi_\mu : \mathbb{C}^\times \longrightarrow T$

(群準同型)

- one parameter subgroup.
- cocharacter

であって $\mathcal{U}_\mu$ へのスカラー倍作用を与える.

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_6 \end{pmatrix} \cdot \left.\left.\begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_3} z_{13} & \frac{a_1}{a_5} z_{15} & \frac{a_1}{a_6} z_{16} \\ \frac{a_2}{a_3} z_{23} & \frac{a_2}{a_5} z_{25} & \frac{a_2}{a_6} z_{26} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_4}{a_3} z_{43} & \frac{a_4}{a_5} z_{45} & \frac{a_4}{a_6} z_{46} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} M_2 \right\} M_4$$

ここで
ノーマライズ!!

座標へのTの作用

$$z_{ij} \longmapsto \underbrace{\frac{a_i}{a_j}}_{t} z_{ij}$$

$$\left\{\left(\sqrt{t}^{-1}, \sqrt{t}^{-1}, \sqrt{t}, \sqrt{t}^{-1}, \sqrt{t}, \sqrt{t}\right)\right\} = T$$

3　5　6

$(t \in \mathbb{C}^\times)$

M : T加群

$\xi : T \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ 指標

$$M_\xi := \left\{ v \in M \mid t.v = \xi(t)\, v \ (\forall t \in T) \right\}$$

仮定 : $M = \bigoplus_\xi M_\xi$, $\dim M_\xi < \infty$

$\gamma = d\xi : \mathrm{Lie}\, T \longrightarrow \mathbb{C}$, M_ξ を M_γ とかく.

$$\mathrm{ch}(M) = \sum_{\gamma \in \hat{T}} (\dim_{\mathbb{C}} M_\gamma) \cdot \underset{\sim}{e}^\gamma$$

~~[illegible]~~

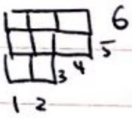
$t_{i+1} - t_i$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$　$\mathbb{Z}^{n-1} \cong \hat{T} \subset (\mathrm{Lie}\, T)^*$

命題

$$\mathrm{ch}\,\mathbb{C}[\mathcal{U}_\mu] = \frac{1}{\prod_{\gamma\in v(\Delta_d)} (1-e^{-\gamma})}$$

$\Delta_d = \{ t_j - t_i \mid 1 \leqq i \leqq d,\ d+1 \leqq j \leqq n \}$

$v \in S_n$: グラスマン置換 μに対応する.

例. $d=3$, $n=6$, $\mu =$  $\rightsquigarrow v = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$

$$\mathrm{ch}\,\mathbb{C}[\mathcal{U}_\lambda] = \frac{1}{(1-e^{t_1-t_3})(\cdots)\cdots}$$

定理 $\mathrm{ch}\,\mathbb{C}[\Omega_\lambda \cap \mathcal{U}_\mu]$

$\lambda \subset \mu$のとき

$$= \frac{\psi_{\lambda|\mu}}{\prod_{\gamma\in v(\Delta_d)} (1-e^{-\gamma})}$$

$${}^\exists \psi_{\lambda|\mu} \in R(T) = \left\{ \sum_{\gamma\in\hat{T}} n_\gamma e^\gamma : \text{有限和} \right\} \subset \mathbb{Z}[e^{\pm t_1}, \dots, e^{\pm t_n}]$$

REF · Chriss – Ginzburg

· Borpho – Brylinsky – MacPherson (Progress in Math)

意味：

$$
\begin{tikzcd}
{[\mathcal{O}_{\Omega_\lambda}]} \arrow[d, mapsto] & \in K_T(Gr(d, \mathbb{C}^n)) \arrow[d, "i_\mu^*"] & e_\mu \overset{i_\mu}{\hookrightarrow} Gr(d, \mathbb{C}^n) \\
i_\mu^*[\mathcal{O}_{\Omega_\lambda}] & \in K_T(e_\mu) \cong R(T)
\end{tikzcd}
$$

$$\| $$

$$\psi_\lambda|_\mu$$

例 $Gr(2, \mathbb{C}^4)$ $\lambda = \square$, $\mu = \boxplus$

$$\mathcal{U}_\mu : \begin{pmatrix} z_{13} & z_{14} \\ z_{23} & z_{24} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{ch}\, \mathbb{C}[\mathcal{U}_\mu]$$

$$= \frac{1}{(1-e^{t_1-t_3})(1-e^{t_1-t_4})(1-e^{t_2-t_3}) \cdot (1-e^{t_2-t_4})}$$

$$I_{\lambda,\mu} = \left\langle \begin{vmatrix} z_{13} & z_{14} \\ z_{23} & z_{24} \end{vmatrix} \right\rangle$$

$$e^{t_1-t_3+t_2-t_4}$$

$$0 \to I_{\lambda,\mu} \longrightarrow \mathbb{C}[\mathcal{U}_\lambda] \to \mathbb{C}[\Omega_\lambda \cap \mathcal{U}_\mu] \longrightarrow 0$$

$$\mathrm{ch}\,\mathbb{C}[\Omega_\lambda \cap \mathcal{U}_\mu] = \mathrm{ch}\,\mathbb{C}[\mathcal{U}_\mu] - \mathrm{ch}\,\mathbb{C}[\mathcal{U}_\lambda]\cdot e^{t_1-t_3+t_2-t_4}$$

$$= \frac{1-e^{t_1-t_3+t_2-t_4}}{(1-e^{t_1-t_3})(1-e^{t_1-t_4})(1-e^{t_2-t_3})(1-e^{t_2-t_4})}$$

$$\therefore \psi_\lambda|_\mu = 1 - e^{\underbrace{t_1-t_3}+\underbrace{t_2-t_4}} \longmapsto 1-u^2$$

$\phi_\mu : \mathbb{C}^\times \hookrightarrow T$ が

$\phi_\mu^* : R(T) \to R(\mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{Z}[u,u^{-1}]$

を誘導 $\boxed{\begin{array}{c} e^{-\gamma} \mapsto u^1 \\ \gamma \in v(\Delta_\alpha) \end{array}}$

ϕ_μ^* の微分版

$f_\mu : H_T^*(pt) \to \mathbb{Z}[t]$, $\gamma \in v(\Delta_\alpha)$ に対して $f_\mu(\gamma)=1$

定理 $f_\mu(\sigma_\lambda^T|\mu) = \mathrm{mult}\, \mathcal{O}_{e_\mu, \Omega_\lambda}$

(証明) $H_{\mathrm{gr}_m \mathcal{O}_{e_\mu,\Omega_\lambda}}(u) = H_{\mathbb{C}[\Omega_\lambda \cap \mathcal{U}_\mu]}(u)$

$$= \phi_\mu^*(\mathrm{ch}\,\mathbb{C}[\Omega_\lambda\cap\mathcal{U}_\mu])$$

$$= \frac{\phi_\mu^*(\chi_\lambda|\mu)}{(1-u)^{d(n-d)}}$$

$$\boxed{\text{補題}\quad \phi_\mu^*(\chi_\lambda|_\mu) = f_\mu(\sigma_\lambda^T|\mu)\cdot(1-u)^{|\lambda|} + (1-u)\text{に関して高次}}$$

$$= \frac{f_\mu(\sigma_\lambda^T|\mu) + v\text{に関して高次}}{(1-u)^{\dim\Omega_\lambda}}$$

$(1-u=:v)$

例 $1-u^2 = 1-(1-v)^2$

$$= 2v+v^2$$

(精神コーギ終了)

系 $\mathrm{mult}\,\Theta_{e_\mu, \Omega_\lambda} = \# \mathcal{E}_\mu(\lambda)$

(証) $\sigma_\lambda|_\mu = \sum_{D \in \mathcal{E}_\mu(\lambda)} \omega_\mu(D)$

$$\omega_\mu(D) = \prod_{(i,j) \in D} (t_{v(d+j)} - t_{v(d+1-j)})$$

$\xrightarrow{f_\mu}$ $\# \mathcal{E}_\mu(\lambda)$

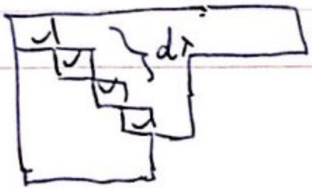
(証2 ?)

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\square = (\sigma_\square|_\lambda)\sigma_\lambda + \sum_\nu \sigma_\nu$$

$$\sigma_\square|_\lambda = \sum_{k=1}^{d} t_{i_k} - \sum_{i=1}^{\alpha} t_i$$

$$e_\lambda|_\mu \cdot (\sigma_\square|_\mu - \sigma_\square|_\lambda) = \sum_\nu \sigma_\nu|_\mu$$

$$\xmapsto{f_\mu} \boxed{m_\mu(\lambda)(d_\mu - d_\lambda) = \sum_\nu m_\mu(\nu) \quad (\#)}$$

$\lambda =$ 

$m_\mu(\lambda) = \# \mathcal{E}_\mu(\lambda)$ が (#) をみたす。

$\{m_\mu(\lambda)\}$ は次の漸化式で定まる