

演算の数理 II 復習用課題

1. 集合 $A = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid b \neq 0\}$ 上の 2 項関係を

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = cb$$

と定める. \sim が同値関係であることを示せ.

2. \mathbb{R} 上の演算 $a * b = a + b - ab$ について以下の問いに答えよ.

(1) $*$ が結合律をみたすことを示せ.

(2) 単位元があれば求めよ.

(3) $a \in \mathbb{R}$ が逆元を持つための条件, およびそのときの a の逆元を求めよ.

4. M を加法群, N を M の部分加法群とする.

(1) $a \sim b \iff a - b \in N$ により M 上の同値関係が定まることを示せ.

(2) $C(a) + C(b) = C(a + b)$ により M/N 上の演算 $+$ が定義できることを示せ.

(3) (2) で定めた演算が結合律をみたすことを示せ.

5. R を環, I を R の両側イデアルとする. R/I 上の次で定まる演算を考える

$$C(a) \cdot C(b) = C(a \cdot b) \quad (a, b \in R).$$

(1) 上の演算が定義できることを示せ.

(2) この演算が結合律をみたすことを示せ.

(3) この演算および R/I 上の加法が分配律をみたすことを示せ.

6. $f: R \rightarrow R'$ を環準同型とする.

(1) $\text{Im}(f)$ が R' の部分環であることを示せ.

(2) $\text{Ker}(f)$ が R の両側イデアルであることを示せ.

7. R を可換環とする. $M_2(R)$ の部分集合 $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \in M_2(R) \mid a, b \in R \right\}$ は $M_2(R)$ の左イデアルであることを示せ.